# Das St. Petersburg-Paradoxon

Jürgen Jerger, Freiburg

## 1. Das Erwartungswert-Kriterium bei Entscheidungen unter Unsicherheit

Unsicherheit über die Folgen zu treffender Entscheidungen ist ein prägendes Merkmal des täglichen Lebens. Die Auswahl unter mehreren Investitionsalternativen, die Entscheidung für oder gegen die Teilnahme an einer Lotterie bzw. den Abschluß einer Versicherung sind naheliegende Beispiele dafür. Daraus leitet sich unmittelbar ein Bedarf nach einem „guten" Kriterium her, das uns in die Lage versetzt, auch unter der gegebenen Unsicherheit rationale Entscheidungen zu treffen.

Als Einstiegsbeispiel wollen wir die Auswahl unter den folgenden drei Investitionsalternativen betrachten:

| Alternative 1 | | Alternative 2 | | Alternative 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rendite r | p | Rendite r | p | Rendite r | p |
| 5% | 1 | 4%<br>10% | 0,8<br>0,2 | −10%<br>10%<br>20% | 0,1<br>0,8<br>0,1 |
| E = 5% | | E = 0,8·4%<br>+ 0,2·10%<br>= 5,2% | | E = 0,1·(−10%)<br>+ 0,8·10%<br>+ 0,1·20%<br>= 9% | |

*Tab. 1: Renditen r von Investitionsmöglichkeiten und deren Eintrittswahrscheinlichkeit p*

Ein Blick auf *Tab. 1* offenbart die Schwierigkeit der Diskriminierung zwischen den drei Alternativen. Die erste ist nicht mit Unsicherheit behaftet, was vielen als Vorteil per se erscheinen mag, bietet aber eine vergleichsweise eng begrenzte Gewinnmöglichkeit. Der maximal erzielbare Gewinn ist bei den anderen Alternativen jeweils größer. Die dritte Investitionsalternative offeriert den größten Maximalwert, beinhaltet aber gleichzeitig die Gefahr eines Verlustes. Um in solchen Entscheidungssituationen eine Handlungsanweisung zu begründen, können nun verschiedene Kriterien herangezogen werden: Größter maximaler Gewinn, kleinster maximaler Verlust, geringste Streubreite der Renditen wären einige Alternativen. Eine Übersicht über die gängigsten Entscheidungskriterien bei Unsicherheit bietet *Schmidt, R.-B.* (1973), S. 47 ff. Das Erwartungswertkriterium stellt auf das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Ausprägungen (im Beispiel: der Renditen) ab. Die Berechnung ist in *Tab. 1* durchgeführt und weist die Alternative 3 als gemäß dem Erwartungswertkriterium überlegene Investitionsentscheidung aus. Die erwartete Rendite ist bei den gewählten Daten 9%.

Damit ist eine Möglichkeit gefunden, Entscheidungsalternativen mit stochastischen Ergebnissen miteinander zu vergleichen. Man sollte sich aber bewußt sein, daß trotz der scheinbaren Eleganz und Überlegenheit des Erwartungswertkriteriums die Entscheidung für das Kriterium selbst nicht näher bzw. nur ad hoc begründet wurde. Das St. Petersburg-Paradoxon stellt nun ein Beispiel vor, in dem ganz eindeutig von einer überwiegenden Anzahl der Personen der Erwartungswert nicht als Entscheidungshilfe herangezogen wird. Die Analyse dieses über 250 Jahre alten Beispiels nimmt, wie wir sehen werden, wichtige Aspekte der späteren Konsumtheorie vorweg.

## 2. Das klassische Beispiel des St. Petersburg-Paradoxons

Angenommen, jemand schlägt Ihnen ein Spiel mit einer fairen (d.h. nicht gezinkten) Münze mit folgender Gewinnregel vor: Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis die Münze auf „Kopf" landet. Fällt „Zahl", so bekommen Sie beim ersten Mal 1 DM, beim zweiten Mal 2 DM, dann 4 DM, 8 DM etc. Die Frage lautet nun, wieviel Sie bereit sind, für das Angebot dieses Spiels zu bezahlen, mit anderen Worten, welchen sicheren Gewinn Sie für die Teilnahme an diesem Spiel aufzugeben bereit wären. Offensichtlich liegt hier eine Anwendung für das eingeführte Erwartungswertkriterium vor, wir fragen also nach dem erwarteten Gewinn aus diesem Spiel. Dieser kann sinnvollerweise als Obergrenze für den Einsatzbetrag angesehen werden.

In der graphischen Darstellung des Spielverlaufs *(Abb. 1)* interessiert uns für die Berechnung des erwarteten Gewinns nur der äußere Ast, entlang welchem nur „Zahl" fällt. Laut der eingeführten Regel ist das Spiel beim ersten Erscheinen von „Kopf" beendet.

In jedem Knoten ist die Wahrscheinlichkeit, mit „Zahl" weiterzukommen 1/2, vom Beginn des Spiels aus betrachtet ist daher die Wahrscheinlichkeit, im i-ten Knoten (wobei der Knoten am Beginn des Spiels den Wert Null annimmt) mit Zahl zu landen, gegeben durch

$$p(i) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{\text{i Faktoren}} = \frac{1}{2^i} \qquad (1)$$

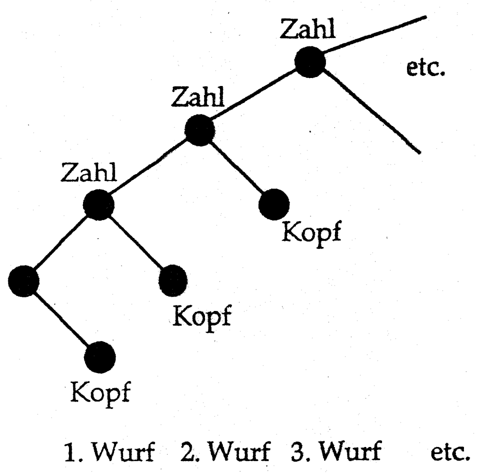


*Abb. 1*

Der Gewinn in jedem dieser Punkte (G(i) = 1, 2, 4, 8, ...) lautet im i-ten Knoten

$$G(i) = 2^{i-1}\ , \tag{2}$$

so daß der mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtete, d.h. erwartete, Gewinn $G^e$ bei einer Höchstzahl von n Würfen durch

$$G^e = \sum_{i=1}^{n} p(i) \cdot G(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot n \tag{3}$$

gegeben ist. Die Berechnung von $G^e$ ist völlig analog zur Erwartungswertberechnung für die Renditen in *Tab. 1.* Wird zu Beginn des Spiels keine Obergrenze für die maximale Anzahl der Würfe n festgelegt, so ist der Erwartungswert dieses Spiels unendlich groß. Dies impliziert, daß nach dem Erwartungswertkriterium jeder beliebige Betrag für die Möglichkeit der Teilnahme bezahlt werden sollte. Selbst wenn man die Unbeschränktheit der Anzahl der Würfe fallen läßt und sich auf eine maximale Anzahl von z.B. 100 000 einigt, so ergäbe sich immer noch ein Erwartungswert von 50 000 DM, eindeutig mehr, als die meisten zu zahlen bereit wären. Diese Diskrepanz zwischen beobachtbaren bzw. für „vernünftig" erachteten Entscheidungen und dem Ergebnis des Erwartungswertkriteriums ist in die Literatur als St. Petersburger Paradoxon eingegangen. Formuliert wurde es zu Beginn des 18. Jahrhunderts von dem Schweizer Mathematiker *Nikolaus Bernoulli*, eine Lösung wurde (u.a.) 1738 von seinem Cousin *Daniel Bernoulli* angeboten. Letzterer schrieb seinen Beitrag (in Englisch nachzulesen, vgl. *Bernoulli, D.*, 1738/1954) während eines Aufenthalts in St. Petersburg, woraus sich der Name dieses Problems erklärt.

Bevor die Lösung des Paradoxons im folgenden Abschnitt besprochen wird, soll zunächst ein vielleicht noch einleuchtenderes und weniger extremes Beispiel für die Ambivalenz des Erwartungswertkriteriums vorgestellt werden. Das Beispiel ist ebenfalls aus dem Originalaufsatz von *D. Bernoulli* (1738/1954, S. 24) entnommen. Angenommen, eine Lotterie schüttet mit gleichen Wahrscheinlichkeiten 0 bzw. 20 000 DM aus. Die Frage, ob (bei einem Erwartungswert, der offensichtlich bei 10 000 DM liegt) ein Lotterieschein für 9000 DM verkauft werden sollte, hängt nun offensichtlich von dem bereits vorhandenen Vermögen eines Spielers ab. Ein sehr armer Spieler wäre gut beraten, seinen Schein zu verkaufen, während einem sehr reichen Spieler das nicht geraten werden kann. Diese Erwägung ist reichlich ad hoc, entspricht aber einem „gesunden Menschenverstand". Dies trifft auch dann zu, wenn man nicht davon ausgeht, daß die Risikopräferenzen des Armen und Reichen unterschiedlich sind. Auch wenn beide die gleiche Abneigung gegen einen drohenden Verlust haben, wird die Empfehlung in der geschilderten Weise unterschiedlich sein. Die in Abschnitt 3 vorzustellende Lösung des St. Petersburg-Paradoxons vermag auch hier eine analytische Begründung nachzuliefern.

### 3. Die Erklärung des Paradoxons: Erwartungsnutzen statt erwarteter Gewinn

Die Lösung *Daniel Bernoullis* basiert auf dem Gedanken, daß die potentiellen Spieler nicht unmittelbar die Höhe des erwarteten Gewinnes interessiert, sondern der erwartete Nutzen aus dem Spiel. Die Erkenntnis, daß hier eine Unterscheidung vorgenommen werden muß, ist sein wesentlicher Verdienst. *Bernoulli, D.* (1738/1954, S. 27) kritisiert die Vernachlässigung einer expliziten Nutzenbetrachtung mit folgenden Worten:

„Until now scientists have usually rested their hypothesis on the assumption that all gains must be evaluated exclusively in terms of themselves, i.e., on the levels of their intrinsic qualities, and that these gains will always produce a utility directly proportionate to the gain."

Wir benötigen daher eine Nutzenfunktion U = U(G), die den Gewinn in Nutzeneinheiten transformiert. Die erste Ableitung der Funktion ist positiv, d.h. ein zusätzlicher Gewinn wird immer einen zusätzlichen positiven Nutzen stiften. Entscheidend ist nun das Vorzeichen der zweiten Ableitung: Nimmt man an, daß die Nutzenzuwächse mit steigendem G kleiner werden ($U''(G) < 0$), so läßt sich das Paradox auflösen. Zunächst müssen wir jedoch der stochastischen Natur des Spiels Rechnung tragen, und von (deterministischem) Nutzen auf das Konzept des **Erwartungsnutzens** übergehen. Die Einführung der Nutzenfunktion ändert ja nichts an der Tatsache, daß das Ergebnis (ob nun in Gewinn oder Nutzen ausgedrückt) des Spiels ein stochastisches ist. Wie bei der Erwartungswertberechnung drückt der Erwartungsnutzen $U^e$ die mit der Eintrittswahrscheinlichkeit gewichteten Nutzenwerte der Gewinne aus. Für die beschriebene Spielsituation ergibt sich bei einer Höchstzahl von n Würfen:

$$U^e = p(G) \cdot U(G) = \sum_{i=1}^{n} p(i) \cdot U(G(i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot U(2^{i-1})\ . \tag{4}$$

In Gleichung (4) wird eine Erwartungsnutzenfunktion (oder auch Risikonutzenfunktion) beschrieben, die oft auch als *von Neumann-Morgenstern*-Nutzenfunktion bezeichnet wird. Es handelt sich hierbei um ein **kardinales** Nutzenkonzept (d.h. Nutzendifferenzen sind angebbar und vergleichbar), was insofern besonderer Erwähnung bedarf, als die üblicherweise gelehrte Nutzentheorie nur ordinale Nutzenmessung unterstellt.

*Abb. 2* veranschaulicht die Bedeutung einer expliziten Nutzenfunktion graphisch.

Im unteren Quadranten ist der Zusammenhang von erwarteten Gewinnen und maximaler Anzahl der Würfe gemäß Gleichung (3) abgebildet. Wenn Nutzen und Gewinn in gleichen Einheiten gemessen werden, veranschaulicht die Gerade $U_0$ (es ist leicht zu sehen, daß hier die zweite Ableitung $U''_0$ (G) gleich Null ist) im oberen Quadranten eine Situation, in der ein Individuum bereit wäre, tatsächlich $G^e$ für die Teilnahme an dem Spiel herzugeben. Es spielt in diesem Fall keine Rolle, ob das Kriterium des erwarteten Gewinns oder des daraus entstehenden Nutzens herangezogen wird. Die Nutzenfunktion $U_1$ (mit $U''_1$ (G) < 0) kennzeichnet hingegen eine Situation, in der nicht $G^e$, sondern ein kleineres Nutzenäquivalent gesetzt wird. Normiert man die Anzahl der Würfe auf $\bar{n}$, so daß $G^e(\bar{n})$ als Gewinn erwartet werden kann, so wird beispielsweise nur $U_1(\bar{n})$ eingesetzt. Die Bedingung $U''_1 < 0$ verlangt nicht zwingend, daß $U_1$ immer unter der 45°-Linie verlaufen muß, sondern nur, daß es einen Grenzwert $G_0$ gibt, ab dem $U_1(G_0) < U_0(G_0)$ ist. Es geht unmittelbar aus *Abb. 2* hervor, daß für ein größer werdendes n diese Diskrepanz immer mehr zunimmt.

Die algebraische Darstellung dieses Arguments geht üblicherweise von einer logarithmischen Nutzenfunktion (diese spezielle Form benutzte auch *D. Bernoulli*) aus. Diese lautet wie folgt:

$$U(G) = a \cdot \log\left(\frac{G}{b}\right) \tag{5}$$

bzw.

$$U(G) = a \cdot (\log G - \log b)\ . \tag{5'}$$

a und b sind Parameter der Nutzenfunktion, von denen vorausgesetzt wird, daß sie positiv sind. log (·) bezeichnet den Logarithmus zur Basis 10.

Durch Einsetzen von (5') in (4) ergibt sich für den Erwartungsnutzen

$$\begin{aligned} U^e &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}(a \cdot \log(2^{i-1}) - a \cdot \log(b)) \\ &= a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2^i} \cdot \log 2 - a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \cdot \log b\ . \end{aligned} \tag{6}$$

Die Ausdrücke

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2^i} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

konvergieren für ein gegen unendlich wachsendes n gegen den Wert 1 (vgl. *Levy/Sarnat*, 1984, S. 113), so daß sich unter dieser Voraussetzung (6) einfach als

$$U^e = a \cdot (\log 2 - \log b) \tag{6'}$$

schreiben läßt. Ein Vergleich mit (5') offenbart, daß das Spiel offensichtlich den gleichen Nutzen stiftet wie ein sicherer Gewinn in Höhe von 2.

*Levy/Sarnat* (1984, S. 110) berichten von einem Experiment mit Studenten (ohne Begrenzung der Anzahl der Würfe, d.h. mit einem unendlich großen Erwartungswert), welches ergab, daß die meisten für das Angebot dieses Spiels 2–3 DM zu bezahlen bereit waren. Das höchste Gebot belief sich auf 8 DM. Die Studenten verhielten sich also gemäß einer Nutzenfunktion, die durch (5) gut charakterisiert ist. Offensichtlich ist nicht das Erwartungswertkriterium das mehr oder weniger unbewußte Kalkül der Probanden, sondern die Evaluierung des Spiels mit einer Nutzenfunktion gemäß (5).

Mit Hilfe der Nutzenfunktion (5) bzw. (5') sind wir nun auch in der Lage, das am Ende des zweiten Abschnitts eingeführte Beispiel zu lösen: Angenommen, sowohl der Arme als auch der Reiche messen ihren Nutzen gemäß (5) und verfügen über ein Los für die beschriebene Lotterie; darüber hinaus soll der Arme ein Vermögen von 100 DM besitzen, der Reiche eines von 100 000 DM. Verkaufen beide die Lose für 9000 DM, so erzielen sie den sicheren Nutzen U(9100) = 3,959a – a · log b bzw. U(109 000) = 5,037a – a · log b. Die Teilnahme an der Lotterie stiftet dem Armen einen erwarteten Nutzen von $U^e$ = 1/2 · U(100) + 1/2 · U(20 100) = 3,152a – a · log b, dem Reichen hingegen $U^e$ = 1/2 · U(100 000) + 1/2 · U(120 000) = 5,040a – a · log b. Damit ist die intuitive Empfehlung auch analytisch untermauert.

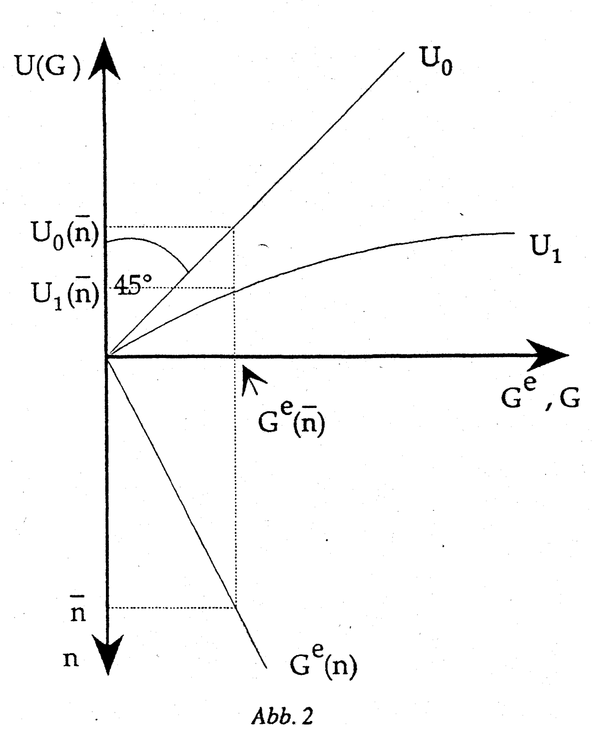

*Abb. 2*

## 4. Die Bedeutung des St. Petersburger Paradoxons

Der entscheidende Beitrag *Daniel Bernoullis* zur Theorie der Entscheidung unter Unsicherheit war die Einführung einer expliziten Nutzenfunktion verbunden mit der Erkenntnis, daß der zusätzliche Nutzen einer gegebenen Gütermenge (bzw. eines Gewinns) vom bereits erreichten Niveau abhängt. Er war dabei seiner Zeit weit voraus, die Arbeit von *H.H. Gossen* datiert über 100 Jahre später, die Übernahme in den festen Wissensschatz der Nationalökonomie durch *W.St. Jevons, L. Walras* und *K. Menger* erfolgte noch später.

Im folgenden soll noch kurz auf die intuitive Interpretation des Vorzeichens der zweiten Ableitung einer Nutzenfunktion eingegangen werden:

- Allgemein drückt die Eigenschaft $U'' < 0$ (wie bei $U_1$ in *Abb. 2*) einen **abnehmenden Grenznutzen** aus (vgl. auch das gerade vorgestellte Beispiel), d.h. zusätzliche Gütermengen führen zu einem kleiner werdenden zusätzlichen Nutzen. Dadurch wird eine graduell eintretende Sättigung beim Konsum eines Gutes beschrieben. In der Haushaltstheorie wird diese Eigenschaft üblicherweise mit dem Namen „1. Gossen'sches Gesetz" belegt.
- Im Zusammenhang mit Spielen (oder Investitionsentscheidungen) kann das Vorzeichen der zweiten Ableitung als Indikator der Risikoaversion interpretiert werden. Eine abnehmende Wertschätzung zusätzlicher Gewinne bei steigendem Niveau der Gewinne (d.h. $U''(G) < 0$) impliziert eine Risikoaversion, also eine abnehmende Bereitschaft, für zusätzliche erwartete Gewinne einen zusätzlichen Einsatz zu wagen. Die Diskrepanz zwischen $G^e$ und dem Einsatz wird also größer, je höher die Gewinnmöglichkeiten sind. In *Abb. 2* ist diese Differenz durch den vertikalen Abstand von $U_1$ und $U_0$ gegeben.

In der Literatur wird der von *K.J. Arrow* (1965) und *J.W. Pratt* (1964) eingeführte Term $R = -(U''/U')$ als Risikoaversionsindex benutzt. Geht man von positivem Grenznutzen zusätzlicher Gewinne aus ($U' > 0$), so ist R positiv für einen negativen Wert von U" und drückt — wie $U_1$ in *Abb. 2* — Risikoaversion aus. Im Falle einer Geraden ($U_0$ in *Abb. 2*) nimmt R den Wert Null an; die dadurch implizierte Risikoneutralität ist identisch mit der Beibehaltung der zu Beginn eingeführten Erwartungswertmaximierung. Die dritte Möglichkeit besteht in der Annahme von Risikofreude, bei der die Transformation in Nutzeneinheiten neben dem reinen erwarteten Gewinn eine **zusätzliche positive Bewertung des Risikos** vornimmt. R ist in diesem Fall negativ, die entsprechende Nutzenfunktion weist einen konvexen Verlauf auf.

## Literatur

*Arrow, K.J.* (1965), Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Helsinki 1965.

*Bernoulli, D.* (1738/1954), Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, Econometrica 22, S. 23–36.
Es handelt sich hierbei um eine Übersetzung des Originalaufsatzes „Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis", erschienen in den Commentarii Academiae Scientarium Imperialis Petropolitanae, Tomus V, 1738, S. 175–192. Die englische Übersetzung beinhaltet auch eine (kommentierte) Literaturliste, die eine Übersicht über die bis 1954 zum Petersburger Paradoxon vorhandene Literatur gibt.

*Levy, H., M. Sarnat* (1984), Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice, Englewood Cliffs 1984.
Kapitel 4 beinhaltet eine ausführliche Darstellung des St. Petersburger Paradoxons im Hinblick auf Entscheidungen unter Unsicherheit bei der Zusammenstellung eines Portfolios. Hier werden auch andere Lösungen des Paradoxons (die andere Spezifikationen der Nutzenfunktion verwenden) besprochen.

*Machina, M.J.* (1987), Choice under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved, Journal of Economic Perspectives, Vol. 1, Summer 1987, S. 121–154.
Für interessierte Leser eignet sich dieser Artikel als Referenz für den Stand und die Probleme der neueren Entscheidungstheorie.

*Pratt, J.W.* (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica 32, S. 122–136.

*Schmidt, R.B.* (1973), Wirtschaftslehre der Unternehmung, Band 2: Zielerreichung, Stuttgart 1973.

WiSt

**Vorschau auf Heft 9/1992**

*Prof. Dr. J.-Matthias Graf v.d. Schulenburg,* Ökonomischer Sachverstand ist bei der Reform des Gesundheitswesens nicht gefragt • *Privatdozent Dr. Rainer Klump,* Geld als Argument der Nutzen- und der Produktionsfunktion • *Dr. Sonja Grabner-Kräuter,* Markterschließungsstrategien • *Prof. Dr. Hans-Rudolf Peters,* Transformation der Wirtschaftsordnung in Ostdeutschland • *Prof. Dr. Klaus-Rüdiger Veit,* Die bilanzielle Behandlung von Forschungs- und Entwicklungsausgaben • *Diplom-Volkswirt Raimund Weiland,* Gesetz der Entropie • *Diplom-Volkswirtin Ulrike Beland,* Gleichberechtigung von Frauen aus ökonomischer Sicht • *Dr. Knut Hildebrand,* Aspekte der Zeit bei der Informationsverarbeitung • *Prof. Dr. Dr. Manuel René Theisen,* Promotionsberatung — am Rande des Abgrunds?