

DIE RADIALE EICHUNG
IN DER TRANSPORTTHEORIE
VON QUARKS UND GLUONEN

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt an
der Naturwissenschaftlichen Fakultät II – Physik
der Universität Regensburg

von
Stefan Leupold
aus
Neustadt a. d. Waldnaab

1996

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. U. Heinz

Das Promotionsgesuch wurde eingereicht am 28.2.1996

Prüfungsausschuß:

Prof. Dr. D. Weiss (Vorsitzender)

Prof. Dr. U. Heinz (1. Gutachter)

Prof. Dr. U. Rössler (2. Gutachter)

Prof. Dr. I. Morgenstern (weiterer Prüfer)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Farbige Teilchen im Nicht-Gleichgewicht	9
2.1	Allgemeine Aspekte von Transporttheorien	9
2.2	Transporttheorie für Quarks und Gluonen	19
3	Quantisierung nicht-kovarianter Eichungen	29
3.1	Die temporale Eichung in ihrer naiven Version	30
3.2	Die allgemeine Struktur von Propagatoren	32
3.3	Die Unvollständigkeit der temporalen Eichung	34
3.4	Die Coulomb-Eichung	37
3.5	Das Wechselspiel zwischen Eich- und Randbedingungen	40
3.6	Die kanonische Quantisierung von Eichfeldern	42
3.7	Konsequenzen für die Coulomb-Eichung	47
4	Die radiale Eichung	52
4.1	Vollständigkeit und Randbedingungen der radialen Eichung	52
4.2	Der freie Propagator	56
4.3	Wilson-Loops und Renormierung	62
4.4	Eichinvariante Größen in radialer Eichung	64
4.4.1	Ein spezieller Wilson-Loop	64
4.4.2	Eichinvariante Größen allgemein – Das Äquivalenztheorem von Cheng und Tsai und seine Erweiterung auf die radiale Eichung	70
4.5	Slavnov-Taylor-Identitäten	83
5	Transporttheorie in radialer Eichung	93
6	Schlußbetrachtungen	103

A	Gradientenentwicklung	107
B	Die Lagrange-Dichte des Maxwell-Feldes in Coulomb-Eichung	108
C	Feynman-Regeln im Ortsraum	108
D	Berechnung des freien radialen Propagators	110
E	Der renormierte freie radiale Propagator	112
F	Berechnung einiger Integrale	116
G	Rechenregeln für das Äquivalenzprinzip	118

Play it again, Sam!

Ingrid Bergmann, Casablanca

1 Einleitung

Eine der notwendigen Voraussetzungen für die Existenz komplexer Strukturen in unserer Welt ist die Stabilität der Atomkerne. Es ist mittlerweile allgemein anerkannt, daß die starke Wechselwirkung, die für diese Stabilität verantwortlich ist, zumindest im Prinzip durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben werden kann.

Die in der QCD auftretenden fundamentalen Materiefelder sind die Quarks. Sie bauen u.a. die Protonen und Neutronen auf, die ihrerseits die Atomkerne bilden. Genau wie die erfolgreichste mikroskopische Theorie, die Quantenelektrodynamik (QED), ist die QCD als Eichtheorie konstruiert. Was die QCD aber wesentlich komplexer macht, ist die Tatsache, daß an die Stelle der elektrischen Ladung der QED sogenannte Farbladungen treten. Davon gibt es drei verschiedene, die im normalen Sprachgebrauch mit rot, blau und grün bezeichnet werden. Bei der mathematischen Beschreibung numeriert man sie weniger anschaulich einfach mit 1, 2, 3 durch. Zudem tragen die entsprechenden Antiquarks die Farben anti-rot, anti-blau und anti-grün, was die Farbpalette in eine etwas unorthodoxe Richtung erweitert.

Das Auftreten verschiedener Farbladungen führt dazu, daß die QCD eine nicht-abelsche Eichtheorie ist, im Gegensatz zur abelschen QED. Dadurch erhalten aber auch die Quantenobjekte, die die Farbwechselwirkung vermitteln, die Gluonen, selbst Farbladungen, die sich aus Kombinationen aus den oben aufgezählten ergeben, so z.B. rot mit anti-blau, etc. Auch das ist anders als bei der QED, wo die Photonen selbst elektrisch neutral sind.

Diese bis jetzt sehr formalen Unterschiede zwischen QED und QCD haben gravierende physikalische Auswirkungen; das Energieverhalten der jeweiligen Kopplungskonstante ist genau entgegengesetzt. Die elektromagnetische Kopplungskonstante nimmt mit steigendem Energie-Impuls-Übertrag bzw. bei kürzeren Abständen zu, weil die virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paare die Ladungen nicht mehr so gut abschirmen. Das Gleiche bewirken auch die Quark-Antiquark-Paare bei Farbladungen. Der Effekt wird aber durch die gegenteilige Wirkung der Gluonen überkompensiert, d.h. die meßbare Farbladung wird bei kürzeren Abständen vermindert. Bedingt durch die Tatsache, daß auch die Gluonen farbgeladen sind, wird also die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung bei höheren Energieüberträgen kleiner. Dieser Effekt wird als asymptotische Freiheit bezeichnet.

Umgekehrt steigt die starke Kopplungskonstante mit größeren Abständen, was

zur Folge hat, daß all die störungstheoretischen Methoden, die den Erfolg der QED begründet haben, auf niederenergetische Prozesse der starken Wechselwirkung nur sehr eingeschränkt angewendet werden können. Das ist aber genau der interessante Bereich, wenn man den Aufbau der Nukleonen und anderer Hadronen aus Quarks und den Aufbau der Atomkerne aus Nukleonen erklären will. Insbesondere ist es bis jetzt nicht gelungen, das Phänomen des Confinements ohne zusätzliche Annahmen aus der QCD abzuleiten. Darunter versteht man den interessanten Effekt, daß Quarks nie einzeln auftreten, sondern stets nur in farbneutralen (weißen) Kombinationen (z.B. rot und anti-rot oder rot, grün und blau zusammen).

Da man im Niederenergiebereich die QCD nicht mit störungstheoretischen Methoden analytisch lösen kann, ist man dazu übergegangen, farbwechselwirkende Systeme numerisch zu studieren. Die dabei betrachtete Gitter-Eichtheorie hat allerdings nur einen begrenzten Anwendungsbereich. Sie ist beschränkt auf Systeme, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinden und bei denen zudem alle chemischen Potentiale verschwinden.

Trotzdem ergeben sich aus der Gitter-Eichtheorie interessante Vorhersagen. Die wohl spektakulärste ist das Auftreten eines Phasenüberganges bei einer kritischen Temperatur in der Größenordnung von 2×10^{12} K. Dabei soll die niederenergetische Confinement-Phase in ein Quark-Gluon-Plasma übergehen, in dem sich die farbgeladenen Teilchen mehr oder weniger frei bewegen. Das ist zwar keine Aussage über die niederenergetische Welt, wie sie sich uns heute darstellt, aber es ergibt sich daraus eine interessante kosmologische Konsequenz. Wenn man davon ausgeht, daß das Universum durch einen Urknall entstanden ist — wofür insbesondere die kosmische Hintergrundstrahlung spricht —, dann muß es in einem frühen Stadium seiner Existenz in einer Quark-Gluon-Plasma-Phase gewesen sein. Das verbindet auf interessante Weise die Theorie über das größte mit der über die kleinsten beobachtbaren Systeme, die Kosmologie mit der Kernphysik.

Natürlich möchte man diese Vorhersage der Gitter-Eichtheorie experimentell überprüfen. Die zugrundeliegende Idee ist dabei, in einem möglichst großen System aus Quarks und Gluonen möglichst viel Energie zu deponieren, sodaß das System in die Quark-Gluon-Plasma-Phase „rutscht“. Das versucht man durch Schwerionenkollisionen zu erreichen, da in schweren Kernen bereits zu Beginn des Stoßes viele Quarks enthalten sind. Diese vermehren sich noch durch die Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren aus der dem System zur Verfügung stehenden Energie. Auch diese Sekundärteilchen wechselwirken durch Stöße miteinander, was u.a. zu weiterer Teilchenproduktion führt, etc. Um dem System möglichst viel Energie zuzuführen, wird das Projektil stark beschleunigt, wozu es vorher vollständig ionisiert wird. Während bei der Kollision die Randbereiche der Kerne absplintern, bildet sich im Zentrum ein heißer Feuerball aus miteinander stoßenden Teilchen, in dem sich unter Umständen ein Quark-Gluon-Plasma bildet.

Obwohl das vermutlich die besten Voraussetzungen sind, ein Plasma aus Quarks und Gluonen zu erzeugen, sind auf theoretischer Seite noch viele Fragen ungeklärt. Zunächst befindet sich das System zumindest im Frühstadium der Kollision nicht im thermodynamischen Gleichgewicht. Insofern kann es hier nicht durch die Gitter-Eichtheorie beschrieben werden. Da das System nicht in einem Kasten oder ähnlichem eingesperrt ist, sondern nur durch die Trägheit der in der Stoßzone eingeschlossenen Materie eine Zeit lang zusammenbleibt, ist das Endprodukt des Stoßes ein Teilchenschauer, der mit großem Aufwand detektiert werden muß. Es stellt sich also die Frage, ob das System angefangen von dem hochgradigen Nicht-Gleichgewicht zu Beginn des Stoßes bis zum Entkoppeln der Teilchen am Ende in der Zwischenzeit so lange zusammenbleibt, daß sich durch Sekundärwechselwirkungen ein thermodynamisches Gleichgewicht einstellen kann.

Auch wenn der Äquilibrationvorgang vor dem Entkoppeln der Teilchen sein Ziel erreicht und die Temperatur dabei über der für den Phasenübergang kritischen liegt, ist bisher nicht vollkommen geklärt, wie sich die Existenz eines Quark-Gluon-Plasmas in den Stoßprodukten, den detektierten Teilchen äußert. Daß sich die Quarks innerhalb des Feuerballs frei bewegen, bedeutet ja nicht, daß sie als freie Teilchen zum Detektor gelangen. Vielmehr tritt spätestens beim Entkoppeln der Teilchen, dem sogenannten Ausfrieren, wieder der Confinement-Mechanismus in Kraft, sodaß nur Hadronen in den Detektoren beobachtet werden — neben den bei Stoßprozessen emittierten Photonen.

Um solche Fragen zu klären, müssen Modellrechnungen durchgeführt werden, und zwar einerseits in einem Szenarium, in dem nur Hadronen miteinander wechselwirken und andererseits in einem, in dem eine Zeit lang Quarks und Gluonen die relevanten Freiheitsgrade darstellen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit letzterem. Ausgangspunkt ist die Frage nach dem Äquilibrationvorgang in einem Schwerionenstoß. Um zu klären, auf welcher Zeitskala ein System aus Quarks und Gluonen, das vor dem Stoß in zwei Kernen geordnet ist, das thermodynamische Gleichgewicht erreicht, müssen Methoden der Nicht-Gleichgewichts-Thermodynamik auf eine Theorie mit Eichfreiheitsgraden angewandt werden. Wie sich zeigen wird, ergeben sich bei der Konstruktion einer solchen Transporttheorie für Eichfelder Probleme, die bei Feldern ohne Eichfreiheitsgraden nicht auftreten.

Im nächsten Kapitel werden wir die Grundlagen von Transporttheorien und insbesondere die dabei relevanten eichtheoretischen Größen vorstellen. Wie sich herausstellen wird, kann man die Eichfreiheit der Theorie dazu nutzen, diesen Größen eine möglichst einfache und damit überhaupt erst handhabbare Form zu geben. Um das auf konsistente Art zu gewährleisten, müssen wir sehr genau die Eichfreiheitsgrade der Theorie studieren, was den Hauptteil der vorliegenden Arbeit ausmacht. Zum Schluß werden wir wieder auf transporttheoretische Überlegungen zurückkommen.

Wie allgemein üblich sollten wir am Ende der Einleitung noch ein paar Worte über die verwendeten Einheiten verlieren: Wir benutzen die in der Elementarteilchenphysik gebräuchlichen natürlichen Einheiten $\hbar = c = k_B = 1$.

*Ich kann mich gar nicht entscheiden,
ist alles so schön bunt hier.*

Nina Hagen, TV-Glotzer

2 Farbige Teilchen im Nicht-Gleichgewicht

2.1 Allgemeine Aspekte von Transporttheorien

In der klassischen Physik geschieht die Beschreibung eines Vielteilchensystems im Nicht-Gleichgewicht durch die Phasenraumdichte [1]¹

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) = \sum_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}_i(t)). \quad (2.1)$$

Die klassischen Bahnen der Teilchen erfüllen die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{x}}_i = \vec{p}_i/m \quad \text{und} \quad \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}(\vec{x}_i) = \vec{F}_{\text{ext}}(\vec{x}_i) + \vec{F}_2(\vec{x}_i), \quad (2.2)$$

wobei sich die Kraft \vec{F} zusammensetzt aus einer äußeren Kraft \vec{F}_{ext} , die auf das System wirkt, und einer inneren Kraft \vec{F}_2 , die selbstkonsistent gegeben ist durch

$$\vec{F}_2(\vec{y}) = - \int d^3x d^3p \vec{\nabla}_y V(\vec{y} - \vec{x}) f(\vec{x}, \vec{p}, t). \quad (2.3)$$

Das Potential V beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Teilchen des Systems.

Für die Phasenraumdichte ergibt sich aus (2.2) die Klimontovich-Gleichung

$$\dot{f}(\vec{x}, \vec{p}, t) = - \left(\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_x + \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{x}, \vec{p}, t). \quad (2.4)$$

Im allgemeinen kennt man natürlich nicht alle Bahnen der Teilchen. Andererseits ist das aber auch gar nicht nötig, wenn man sich für thermodynamische Größen wie Druck, Dichte etc. interessiert. Für die Transporttheorie ist der Ensemble-Mittelwert der Klimontovich-Gleichung von zentraler Bedeutung:

$$\left(m \frac{d}{dt} + \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x + m \langle \vec{F}(\vec{x}) \rangle \cdot \vec{\nabla}_p \right) \langle f(\vec{x}, \vec{p}, t) \rangle = C(f). \quad (2.5)$$

Dabei ist $\langle f \rangle$ die Ein-Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion. Der Korrelations-term $C(f)$ ist gegeben durch

$$C(f) = m \int d^3x' d^3p' [\vec{\nabla}_x V(\vec{x} - \vec{x}') \\ \times \vec{\nabla}_p (\langle f(\vec{x}, \vec{p}, t) f(\vec{x}', \vec{p}', t) \rangle - \langle f(\vec{x}, \vec{p}, t) \rangle \langle f(\vec{x}', \vec{p}', t) \rangle)]. \quad (2.6)$$

¹Wir übernehmen hier die Darstellung aus [2].

Im Gegensatz zur Klimontovich-Gleichung (2.4) ist (2.5) keine geschlossene Gleichung mehr, da im Korrelationsterm nicht nur die Ein-, sondern auch die Zwei-Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion $\langle ff \rangle$ vorkommt. Aus (2.4) läßt sich auch für letztere eine Gleichung gewinnen, in die die Drei-Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion eingeht, usw. Dadurch entsteht eine ganze Hierarchie von Gleichungen, die Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon-Hierarchie (BBGKY). Zusammengenommen tragen diese gekoppelten Gleichungen die gleiche Information wie die Klimontovich-Gleichung. Um das Ganze handhabbar zu machen, muß man die Hierarchie an geeigneter Stelle abbrechen, indem man näherungsweise die n -Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion durch Verteilungsfunktionen niedrigerer Ordnungen ausdrückt. Auf diese Weise erhält man z.B. aus (2.5) die Vlasov-Boltzmann-Gleichung

$$\left(m \frac{d}{dt} + \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x + m \langle \vec{F}(\vec{x}) \rangle \cdot \vec{\nabla}_p \right) \langle f(\vec{x}, \vec{p}, t) \rangle = C(\langle f \rangle). \quad (2.7)$$

Der Term auf der rechten Seite wird als Stoßterm bezeichnet. Er bilanziert, wieviele Teilchen in der Zeit dt durch Stöße in das Phasenraumelement bei \vec{x} , \vec{p} hinein- und wieviele herausgestreut werden. In einer Quantentheorie sind neben Stößen auch Zerfälle denkbar. Verschwindet der Stoßterm (Vlasov-Gleichung), so kann das Vielteilchensystem kein thermodynamisches Gleichgewicht erreichen. Das kann man auch umgekehrt betrachten: Eine Näherung, in der die Stöße zwischen den Teilchen vernachlässigt werden, ist zur Beschreibung des Äquilibriumsvorgangs ungeeignet.

Der Phasenraumdichte in der klassischen Physik entspricht in der Quantenmechanik die Wigner-Funktion²

$$\begin{aligned} W(\vec{x}, \vec{p}) &= \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \psi(\vec{x} + \vec{u}/2) \psi^*(\vec{x} - \vec{u}/2) \\ &= \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} e^{\frac{i}{2}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_x} \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{2}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_x} \psi^*(\vec{x}) \\ &= \int d^3u \psi(\vec{x}) e^{-i(\vec{p}-\hat{p})\cdot\vec{u}} \psi^*(\vec{x}) \\ &= \psi(\vec{x}) (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \hat{p}) \psi^*(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dabei haben wir den Impulsoperator $\hat{p} = \frac{i}{2}(\vec{\nabla}_x - \vec{\nabla}_x^\dagger)$ eingeführt. Während für praktische Rechnungen vor allem der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (2.8) bedeutsam ist, stellt die letzte, rein formale Version am anschaulichsten die Verbindung zur klassischen Theorie her: $\psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x})$ ist die Dichte der Zustände im Ortsraum und $\delta(\vec{p} - \hat{p})$ gewissermaßen die Dichte im Impulsraum. Diese Analogie läßt sich noch weiter ausbauen: Durch Integration von f bzw. W über die Impulse

²Wir unterdrücken im folgenden die Abhängigkeit von der Zeitkoordinate t .

erhält man die Teilchendichte

$$n(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{x}, \vec{p}) \quad (2.9)$$

bzw. die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} W(\vec{x}, \vec{p}) = \psi^*(\vec{x}) \psi(\vec{x}). \quad (2.10)$$

Der Teilchenstrom ergibt sich klassisch aus

$$\vec{j}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{x}, \vec{p}) \quad (2.11)$$

und quantenmechanisch aus

$$\vec{j}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\vec{p}}{m} W(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2mi} \psi^*(\vec{x}) (\vec{\nabla}_x - \vec{\nabla}_x^\dagger) \psi(\vec{x}). \quad (2.12)$$

Das zeigt, daß die Wigner-Funktion eine geeignete quantenmechanische Verallgemeinerung der Phasenraumdichte darstellt, obwohl Ort und Impuls eines Quantenobjekts nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden können. Um ein quantenmechanisches Vielteilchensystem zu beschreiben, geht man zu zweitquantisierten Operatoren $\hat{\psi}$ über. Aus der Wigner-Funktion wird der Wigner-Operator \hat{W} .

Die Analoga zu Klimontovich- und Vlasov-Boltzmann-Gleichung ergeben sich aus der Schrödinger-Gleichung für $\hat{\psi}$, da diese ja alle dynamischen Informationen über das System beinhaltet. Betrachten wir dazu ein selbstwechselwirkendes System von Teilchen [3], beschrieben durch

$$i\partial_t \hat{\psi} = \left(-\frac{\vec{\nabla}^2}{2m} + \hat{U} \right) \hat{\psi} \quad (2.13)$$

mit dem Potential

$$\hat{U}(\vec{y}) = \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) V(\vec{y} - \vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}). \quad (2.14)$$

Daraus läßt sich der sogenannte Driftterm $\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \hat{W}$ bestimmen:

$$\begin{aligned} & \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \int d^3u e^{-i\vec{p} \cdot \vec{u}} \hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \\ &= -i \int d^3u e^{-i\vec{p} \cdot \vec{u}} \vec{\nabla}_u \cdot \vec{\nabla}_x [\hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla}_{x+u/2}^2 - \vec{\nabla}_{x-u/2}^2 \right) \left[\hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \right] \\
&= -im \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \left[(-i\partial_t + \hat{U}(\vec{x} + \vec{u}/2)) \hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \right. \\
&\quad \left. - \hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) (i\partial_t^\dagger + \hat{U}(\vec{x} - \vec{u}/2)) \right] \\
&= m \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \left[-\partial_t \left(\hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \right) \right. \\
&\quad - i\hat{U}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \\
&\quad \left. + i\hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \hat{U}(\vec{x} - \vec{u}/2) \right]. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Durch die Taylor-Entwicklung

$$\hat{U}(\vec{x} \pm \vec{u}/2) = e^{\pm \frac{\vec{u}}{2} \cdot \vec{\nabla}_x} \hat{U}(\vec{x}) \tag{2.16}$$

läßt sich die u -Integration in (2.15) durchführen, wenn man u in (2.16) durch $i\nabla_p$ ersetzt. Wir erhalten dadurch

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) = m \left[-\partial_t \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) - ie^{i\diamond} \hat{U}(\vec{x}) \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) + ie^{-i\diamond} \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) \hat{U}(\vec{x}) \right]. \tag{2.17}$$

Der hier eingeführte Operator

$$\diamond := \frac{1}{2} \vec{\nabla}_x^U \cdot \vec{\nabla}_p^W \tag{2.18}$$

wirkt mit seiner Ortsableitung nur auf \hat{U} und mit seiner Impulsableitung nur auf \hat{W} .

Die Taylor-Entwicklung der Operatoren $e^{\pm i\diamond}$ in Ordnungen von \diamond wird als Gradientenentwicklung bezeichnet. Wenn wir nur die konstanten und linearen Terme berücksichtigen, erhalten wir aus (2.17) die Quantenversion der Klimontovich-Gleichung

$$\left(m\partial_t + \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x \right) \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) + \frac{m}{2} \vec{\nabla}_p \cdot \left\{ \hat{F}_2(\vec{x}), \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) \right\} + im \left[\hat{U}(\vec{x}), \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) \right] = 0 \tag{2.19}$$

mit der Kraft

$$\begin{aligned}
\hat{F}_2(\vec{y}) &= -\vec{\nabla}_y \hat{U}(\vec{y}) = -\vec{\nabla}_y \int d^3x \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) V(\vec{y} - \vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}) \\
&= -\vec{\nabla}_y \int d^3x d^3p V(\vec{y} - \vec{x}) \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Abgesehen von der Operator-Ordnung, die ein typischer Quanteneffekt ist, stimmen die Gleichungen (2.19) und (2.20) formal mit den klassischen Gleichungen (2.4) und (2.3) überein. Das wurde durch die Vernachlässigung der höheren Gradiententerme ab $o(\diamond^2 \hat{U} \hat{W})$ erreicht.

Wie sinnvoll das Abbrechen der Gradientenentwicklung ist, hängt von dem betrachteten System ab. Die Näherung scheint gerechtfertigt zu sein, wenn W und U nur schwach im Phasenraum variieren, genauer: wenn für die Skalen Δp_W und Δx_U , auf denen sich W im Impulsraum und U im Ortsraum ändern, folgendes gilt:

$$\Delta p_W \Delta x_U \gg 1. \quad (2.21)$$

In physikalischen Einheiten betrachtet steht auf der rechten Seite dieser Ungleichung \hbar statt 1, weshalb die Gradientenentwicklung auch als semiklassische Entwicklung bezeichnet wird.³ Trotzdem enthält die „semiklassische“ Näherung (2.19) immer noch Quanteninformationen. Würde man bereits an dieser Stelle ignorieren, daß man es mit Operatoren anstatt klassischen Größen zu tun hat, so entfiere der letzte Term auf der linken Seite von (2.19), da klassische Größen miteinander vertauschen. Gerade aus diesem Term werden aber die typischen Boltzmann-Stoßterme abgeleitet [3].

Wie für die klassische Klimontovich-Gleichung, so gilt auch für die Operatorgleichung (2.19), daß sie erst dann praktisch nutzbar wird, wenn man ihren Erwartungswert bildet. Der Erwartungswert des Wigner-Operators

$$W(\vec{x}, \vec{p}) := \langle \hat{W}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \int d^3u e^{-i\vec{p}\cdot\vec{u}} \langle \hat{\psi}(\vec{x} + \vec{u}/2) \hat{\psi}^\dagger(\vec{x} - \vec{u}/2) \rangle \quad (2.22)$$

wird wieder als Wigner-Funktion bezeichnet. Sie entspricht der klassischen Ein-Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion. Die in (2.22) auftretende Fourier-Transformation nach den Relativkoordinaten der Zwei-Punkt-Funktion bezeichnen wir im folgenden als Wigner-Transformation.

Indem wir den Erwartungswert von (2.19) bilden, erhalten wir

$$\left(m\partial_t + \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_x - m\vec{\nabla}_x \langle \hat{U}(\vec{x}) \rangle \cdot \vec{\nabla}_p \right) \hat{W}(\vec{x}, \vec{p}) = C(\vec{x}, \vec{p}). \quad (2.23)$$

Den Term mit dem Erwartungswert des Potentials bezeichnet man als *mean field*-Beitrag (Vlasov-Term). Der Korrelationsterm

$$C = m \diamond \left(\langle \{ \hat{U}, \hat{W} \} \rangle - 2\langle \hat{U} \rangle \langle \hat{W} \rangle \right) - im \langle [\hat{U}, \hat{W}] \rangle \quad (2.24)$$

enthält Vier-Punkt-Funktionen $\langle \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi \rangle$. Diese lassen sich durch Selbstenergie Σ und Zwei-Punkt-Funktion ausdrücken [3]. Für die Selbstenergie gibt es eine zusätzliche Gleichung, in die höhere Ein-Teilchen-irreduzible Funktionen (Vertex-Funktionen) eingehen. Man erhält auch hier eine Gleichungshierarchie, die Dyson-Schwinger-Gleichungen [4].

³In physikalischen Einheiten ist der Operator $\diamond \sim \hbar$. Die Entwicklung in Ordnungen von \diamond ist daher auch zugleich eine Entwicklung in Ordnungen von \hbar .

Dabei gibt es einen subtilen Unterschied zwischen den Gleichungen, die man für Streuexperimente im Vakuum verwendet, und jenen, mit denen man ein Vielteilchensystem beschreibt. Im Vakuum hat man es nur mit zeitgeordneten n -Punkt-Funktionen zu tun, wohingegen im uns interessierenden Fall chronologische, antichronologische und ungeordnete Greensche Funktionen auftreten [3]. Die chronologische Zwei-Punkt-Funktion $G^c(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1)$ z.B. beschreibt eine Störung, bei der ein Teilchen am Raumzeitpunkt \vec{x}_1, t_1 dem Vielteilchensystem hinzugefügt wird, zum Punkt $\vec{x}_2, t_2 > t_1$ propagiert und dort wieder entfernt wird. Die antichronologische Zwei-Punkt-Funktion G^a beschreibt eine Störung, bei der sich das Teilchen rückwärts in der Zeit bewegt. Durch Wigner-Transformation der ungeordneten Zwei-Punkt-Funktion $G^<$ erhält man für $t_1 = t_2$ die Wigner-Funktion (2.22).

Formale Übereinstimmung mit der Vakuumtheorie ergibt sich durch Einführung einer geschlossenen Zeitkontur C , die mit infinitesimalem positiven Imaginärteil von $-\infty$ bis $+\infty$ und mit infinitesimalem negativen Imaginärteil wieder zurück läuft. Das ist in Abb. 1 dargestellt.

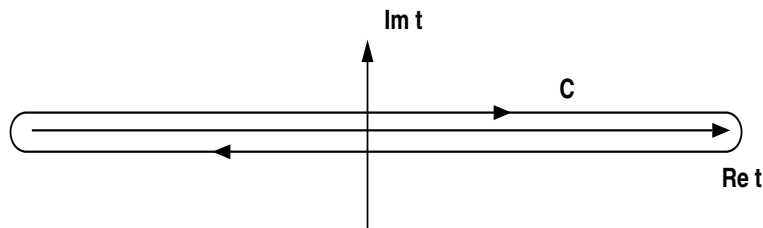


Abbildung 1: Geschlossene Zeitkontur C .

Beispielsweise für eine Greensche Funktion mit zwei Zeitargumenten auf dieser geschlossenen Kontur ergeben sich dann verschieden geordnete Zwei-Punkt-Funktionen, je nachdem, ob die Zeitargumente beide auf dem oberen Ast (chronologisch) oder beide auf dem unteren (antichronologisch) oder auf verschiedenen Ästen (ungeordnet) liegen. Durch diesen Trick wird z.B. die Behandlung ungeordneter Greenscher Funktionen durch Pfadintegrale erst möglich, da die n -Punkt-Funktionen, die man im Pfadintegral-Formalismus erhält, automatisch zeitgeordnet sind, im Vakuumfall also chronologisch [7]. Bei einer komplizierteren Zeitkontur sind die aus Pfadintegralen extrahierten Greenschen Funktionen konturgeordnet, was bei geschlossener Zeitkontur den Zugriff auf beliebig geordnete Funktionen erlaubt.

Das Ganze läßt sich nun in einem 2×2 -Matrix-Formalismus ausdrücken:

$$G_{ef}(x, y) = \begin{pmatrix} G^c(x, y) & G^<(x, y) \\ G^>(x, y) & G^a(x, y) \end{pmatrix}, \quad e, f = 1, 2. \quad (2.25)$$

Dabei ist $G^>$ ebenfalls eine ungeordnete Zwei-Punkt-Funktion, bei der die Operatoren in umgekehrter Reihenfolge wie in $G^<$ auftreten. Außerdem sind wir zu Vierervektoren übergegangen, da wir uns nach dieser Einführung in die Quantentransporttheorie, die in der nichtrelativistischen Version am anschaulichsten ist, ohnehin mit der zwangsläufig relativistischen Beschreibung von Quarks und Gluonen beschäftigen wollen.

In diesem *closed time path*- oder Schwinger-Keldish-Formalismus [5], [6] sieht die Dyson-Schwinger-Gleichung für die Zwei-Punkt-Funktion G formal genauso aus wie in der Vakuumtheorie:

$$G(x_2, x_1) = G_0(x_2, x_1) + \int d^4y_2 d^4y_1 G_0(x_2, y_2) \Sigma(y_2, y_1) G(y_1, x_1). \quad (2.26)$$

Dabei sind aber alle auftretenden Größen 2×2 -Matrizen, die natürlich durch Matrix-Multiplikation miteinander verknüpft werden.

Kommen wir zurück zu unserer Quantentransportgleichung (2.23). Indem man durch eine physikalisch motivierte (z.B. störungstheoretische) Näherung die Selbstenergie und damit die Vier-Punkt-Funktionen in (2.24) über Zwei-Punkt-Funktionen ausdrückt, erhält man eine geschlossene Gleichung für die Wigner-Funktion, analog zur klassischen Vlasov-Boltzmann-Gleichung (2.7).

Anstatt den Umweg über die Schrödinger-Gleichung (2.13) für die zweitquantisierte Wellenfunktion $\hat{\psi}$ und die Gleichung (2.15) für den Wigner-Operator zu machen, kann man auch direkt aus der Dyson-Schwinger-Gleichung eine Transportgleichung für die Wigner-Funktion (2.22) ableiten. Für eine ungeordnete Zwei-Punkt-Funktion, d.h. für t und t' auf verschiedenen Zweigen der Kontur, nimmt (2.26) nach Inversion der freien Greenschen Funktion G_0 folgende Form an [3]:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla}_x^2}{2m} \right) G^<(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \int d^4y [\Sigma(\vec{x}, t; y) G(y; \vec{x}', t')]_{12}. \quad (2.27)$$

Durch Wigner-Transformation und anschließende Gradientenentwicklung ergibt sich daraus eine Transportgleichung. Mit einem störungstheoretischen Ansatz für die Selbstenergie (Berücksichtigung der Zwei-Loop-Beiträge = Born-Diagramme) erhält man Stoßterme, die Zwei-Teilchen-Stöße beschreiben (*binary collision approximation*, Boltzmann-Stoßterme). Die resultierende Gleichung erlaubt also eine sehr anschauliche, klassische Interpretation, obwohl in ihre Herleitung typisch quantenphysikalische Größen — Zwei-Loop-Beiträge zur Selbstenergie — eingehen. Die eben beschriebene Prozedur läßt sich nicht nur für ein nichtrelativistisches, selbstwechselwirkendes System [3] durchführen, sondern auch für relativistische Quantenfeldtheorien skalarer Teilchen [8] oder das in der Kernphysik gebräuchliche Walecka-Modell [9].

Wir verzichten auf eine detaillierte Darstellung der Ableitung von Transportgleichungen aus Dyson-Schwinger-Gleichungen und beschränken uns darauf, zwei Aspekte etwas näher zu beleuchten. Ansonsten verweisen wir auf die Fachliteratur [3], [8]-[10] und weitere dort angegebene Referenzen.

Als erstes wollen wir die Gradientenentwicklung etwas genauer unter die Lupe nehmen. Nach Wigner-Transformation entsteht auf der rechten Seite von (2.27) der Ausdruck

$$\int d^4u e^{ik \cdot u} \int d^4y \Sigma(X + u/2, y) G(y, X - u/2). \quad (2.28)$$

Dabei sind wir wieder zur Vierervektor-Notation übergegangen und haben den Schwerpunkt $X_0 := (t + t')/2$, $\vec{X} := (\vec{x} + \vec{x}')/2$ eingeführt. Dieser Ausdruck läßt sich nun um X entwickeln. Mit der Wigner-Transformierten

$$\tilde{G}(X, k) := \int d^4u e^{ik \cdot u} G(X + u/2, X - u/2) \quad (2.29)$$

und der entsprechenden Definition für $\tilde{\Sigma}$ ergibt sich (vgl. Anhang A)

$$e^{-i\diamond} \tilde{\Sigma}(X, k) \tilde{G}(X, k). \quad (2.30)$$

Der \diamond -Operator ist dabei gegeben durch [10]

$$\diamond := \frac{1}{2} \left(\partial_X^\Sigma \cdot \partial_k^G - \partial_k^\Sigma \cdot \partial_X^G \right). \quad (2.31)$$

Das steht übrigens nicht im Widerspruch zu Definition (2.18), da dort das Potential U nicht impulsabhängig ist und damit der zweite Summand in (2.31) entfällt. Insofern ist (2.31) eine Verallgemeinerung von (2.18).

Bei Quantentransporttheorien beschränkt man sich auf die Terme bis einschließlich erster Ordnung in \diamond . Aus dem führenden Beitrag $\tilde{\Sigma}\tilde{G}$ extrahiert man den Stoßterm. Beschränkt man sich bei dem in \diamond linearen Beitrag auf den störungstheoretisch niedrigsten Term, so ergibt sich daraus wieder der *mean field*-Term aus (2.23) (Hartree-Term), ergänzt um den zugehörigen Austausch-Term (Fock-Term).

Das Kriterium für die Vernachlässigung höherer Gradiententerme ist analog zu dem nach (2.20) angegebenen. Wigner-Funktion und (Wigner-transformierte) Selbstenergie dürfen nur schwach im Phasenraum variieren. Für die Skalen, auf denen sie sich ändern, muß gelten

$$\Delta X_G \Delta k_\Sigma \gg 1 \quad \text{und} \quad \Delta X_\Sigma \Delta k_G \gg 1. \quad (2.32)$$

Ein zweiter interessanter Aspekt bei der Ableitung einer Transportgleichung aus (2.27) ist die Entstehung des Driftterms. Man gewinnt ihn bei Einführung von

Schwerpunkt- und Relativkoordinaten aus $\vec{\nabla}_x^2$:

$$\vec{\nabla}_x^2 = \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla}_X + \vec{\nabla}_u \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla}_X + \vec{\nabla}_u \right) \quad (2.33)$$

mit $\vec{X} := (\vec{x} + \vec{x}')/2$ und $\vec{u} := \vec{x} - \vec{x}'$. Der Mischterm $\vec{\nabla}_X \cdot \vec{\nabla}_u$ liefert den Driftterm, da $\vec{\nabla}_u$ bei der Wigner-Transformation durch $-i\vec{k}$ ersetzt wird. Die anderen beiden Terme in der letzten Gleichung tragen übrigens gar nicht zur Transportgleichung bei, sondern zu einer um Quanteneffekte erweiterten Massenschalenbedingung [8], [9].⁴

Ganz analog ergibt sich bei einer relativistischen Theorie skalarer Teilchen der Driftterm aus dem Klein-Gordon-Operator

$$\square_x + m^2 \quad \rightarrow \quad \partial_u \cdot \partial_X \quad \rightarrow \quad k \cdot \partial_X. \quad (2.34)$$

Bei der Beschreibung von Fermionen (z.B. Quarks) sieht die Sache aber etwas anders aus, da der Dirac-Operator nur Ableitungen erster Ordnung enthält. Allerdings ist die freie Dirac-Gleichung ja gerade so konstruiert, daß jede Spinor-Komponente die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Das kann man sich auch dann zunutze machen, wenn die Fermionen mit anderen Teilchen wechselwirken. Wir wollen wieder die Operator-Bewegungsgleichung mit derjenigen für die Zweipunkt-Funktion vergleichen. Dazu betrachten wir Fermionen, die mit Spin-1-Teilchen wechselwirken, z.B. Nukleonen mit ω -Mesonen.⁵ Die Dirac-Gleichung ist gegeben durch

$$[i\gamma_\mu(\partial_x^\mu - ig\hat{\omega}^\mu(x)) - m] \hat{\psi}(x) = 0, \quad (2.35)$$

und eine Gleichung für den Wigner-Operator ergibt sich durch Wigner-Transformation von⁶

$$[i\gamma_\mu(\partial_x^\mu - ig\hat{\omega}^\mu(x)) - m] \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y) = 0. \quad (2.36)$$

Obwohl diese Gleichung die volle dynamische Information über den Wigner-Operator enthält, ist sie nicht optimal auf transporttheoretische Betrachtungen zugeschnitten, da sie keinen Driftterm enthält. Durch Anwendung des adjungierten Dirac-Operators

$$-i\gamma_\mu(\partial_x^\mu - ig\hat{\omega}^\mu(x)) - m \quad (2.37)$$

⁴Daß sich aus der einen Dyson-Schwinger-Gleichung zwei neue, nämlich Transport- und Massenschalen-Gleichung, ergeben, kommt durch die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil zustande.

⁵Warum wir nicht gleich Quarks und Gluonen nehmen, wird in Kürze klar werden.

⁶Der Wigner-Operator ist jetzt eine 4×4 -Matrix im Spinor-Raum.

auf (2.36) erhalten wir die quadratische Dirac-Gleichung [2]

$$\left[(\partial_\mu^x - ig\hat{\omega}_\mu(x))(\partial_x^\mu - ig\hat{\omega}^\mu(x)) + m^2 - \frac{1}{2}g\sigma_{\mu\nu}\hat{F}^{\mu\nu}(x) \right] \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) = 0 \quad (2.38)$$

mit dem Spin-Tensor [11]

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2.39)$$

und der Feldstärke

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\hat{\omega}_\nu(x) - \partial_\nu\hat{\omega}_\mu(x). \quad (2.40)$$

Durch Wigner-Transformation von (2.38) entsteht aus $\partial_\mu^x\partial_x^\mu$ unter anderem der gewünschte Driftterm.

Die Sache ist etwas umständlicher, wenn man statt der Operatorgleichungen die Gleichungen für die n -Punkt-Funktionen betrachtet, insbesondere

$$(i\gamma_\mu\partial_x^\mu - m) \langle \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) \rangle = -g\gamma_\mu\langle \hat{\omega}^\mu(x)\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) \rangle. \quad (2.41)$$

Auf diese Gleichung kann man natürlich nicht mehr den adjungierten Dirac-Operator (2.37) anwenden, da wir nicht mehr mit Operatoren, sondern mit Erwartungswerten arbeiten. Man könnte sich nun auf den Standpunkt stellen, daß man eben erst von der quadratischen Dirac-Gleichung den Erwartungswert bildet und nicht schon von der linearen. Das geht aber am Problem insofern vorbei, als man nicht immer geneigt ist, mit Operatorgleichungen zu beginnen. Im Pfadintegral-Formalismus etwa hat man es gar nicht mit Operatoren zu tun, sondern immer nur mit Gleichungen für n -Punkt-Funktionen. Das beste, was wir dann tun können, ist, auf (2.41) den freien adjungierten Dirac-Operator anzuwenden:

$$(\square_x + m^2) \langle \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) \rangle = -g(-i\gamma_\nu\partial_x^\nu - m) \gamma_\mu\langle \hat{\omega}^\mu(x)\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) \rangle. \quad (2.42)$$

Auf der linken Seite haben wir nun schon den Ausdruck, aus dem der Driftterm entsteht. Um den Erwartungswert von (2.38) vollständig zu reproduzieren, ersetzen wir $m\hat{\psi}(x)$ auf der rechten Seite von (2.42) mit Hilfe der Dirac-Gleichung (2.35) durch

$$[i\gamma_\nu\partial_x^\nu + g\gamma_\nu\hat{\omega}^\nu(x)]\hat{\psi}(x). \quad (2.43)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das auch im Pfadintegral-Formalismus möglich ist. Durch diesen Trick ergibt sich aus (2.42) die Relation

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \langle \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(y) \rangle = & \quad (2.44) \\ i g \gamma_\nu \gamma_\mu \partial_x^\nu \langle \hat{\omega}^\mu(x) \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle + g \gamma_\mu \langle \hat{\omega}^\mu(x) [i \gamma_\nu \partial_x^\nu + g \gamma_\nu \hat{\omega}^\nu(x)] \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle \end{aligned}$$

und nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \langle \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle = \\ ig \langle [\partial_\mu^x \hat{\omega}^\mu(x)] \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle + 2ig \langle \hat{\omega}^\mu(x) \partial_\mu^x \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle \\ + g^2 \langle \hat{\omega}_\mu(x) \hat{\omega}^\mu(x) \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle + \frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} \langle \hat{F}^{\mu\nu}(x) \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y) \rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

in Übereinstimmung mit (2.38).

Die Drei- und Vier-Punkt-Funktionen auf der rechten Seite lassen sich nun wieder durch Zwei-Punkt- und Ein-Teilchen-irreduzible Funktionen ausdrücken. Es entsteht eine der Dyson-Schwinger-Gleichung (2.26) ähnliche Relation. Der freie Operator ist allerdings hier der Klein-Gordon- und nicht mehr der Dirac-Operator. Zudem wird über die Vier-Punkt-Funktion nicht nur die Selbstenergie, sondern auch die irreduzible Vertex-Funktion ins Spiel kommen. Ein Vergleich dieser, aus der quadratischen Dirac-Gleichung entstandenen Relation mit der herkömmlichen Dyson-Schwinger-Gleichung, die sich aus der linearen Dirac-Gleichung ergibt, wäre sicherlich interessant. Leider müssen wir uns diesen Ausflug versagen, um unser Ziel nicht aus den Augen zu verlieren. So muß diese Untersuchung zukünftigen Arbeiten vorbehalten bleiben.

2.2 Transporttheorie für Quarks und Gluonen

Nach dieser längeren, aber hoffentlich nicht uninteressanten Einführung in die allgemeinen Aspekte von Quantentransporttheorien wenden wir uns der Beschreibung von Quarks und Gluonen zu. Wir betrachten eine nicht-abelsche $SU(N)$ -Eichtheorie [12]. Die Quarks befinden sich in der N -dimensionalen Fundamentaldarstellung. Sie transformieren sich also unter lokalen Eichtransformationen

$$V(x) = \exp(ig\Lambda_a(x)t^a) \quad (2.46)$$

gemäß

$$\psi(x) \rightarrow V(x) \psi(x) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) V^{-1}(x). \quad (2.47)$$

Dabei bezeichnen die t^a -Matrizen die Generatoren der Eichtransformationen in der Fundamentaldarstellung ($a = 1, \dots, N^2 - 1$). Sie erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t_c \quad (2.48)$$

mit den vollkommen antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} . Wir wählen für die Generatoren die Normierung

$$\text{Sp}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.49)$$

Die $N^2 - 1$ Gluonfelder $A_\mu^a(x)$ lassen sich zu einer $N \times N$ -Matrix zusammenfassen:

$$A_\mu(x) := A_\mu^a(x)t_a. \quad (2.50)$$

Ihr Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$A_\mu(x) \rightarrow {}^V A_\mu(x) := V(x) \left(A_\mu(x) - \frac{1}{ig} \partial_\mu^x \right) V^{-1}(x). \quad (2.51)$$

Aus der kovarianten Ableitung in ihrer Fundamentaldarstellung

$$D_\mu(x) := \partial_\mu^x - igA_\mu(x) \quad (2.52)$$

ergibt sich die Feldstärke

$$F_{\mu\nu}(x) := -\frac{1}{ig} [D_\mu(x), D_\nu(x)] \quad (2.53)$$

mit dem Transformationsverhalten

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow V(x) F_{\mu\nu}(x) V^{-1}(x). \quad (2.54)$$

Da wir im folgenden meist im Pfadintegral-Formalismus [7] arbeiten, definieren wir die n -Punkt-Funktionen nicht mehr über die Erwartungswerte der entsprechenden Operatoren, sondern durch

$$\langle \xi \rangle := \frac{\int \mathcal{D}[A, \psi, \bar{\psi}] \xi \exp(iS[A, \psi, \bar{\psi}])}{\int \mathcal{D}[A, \psi, \bar{\psi}] \exp(iS[A, \psi, \bar{\psi}])}. \quad (2.55)$$

Dabei ist ξ ein beliebiges Produkt von Quark- und Gluon-Funktionen und

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu D^\mu(x) - m) \psi(x) \right] \quad (2.56)$$

die Wirkung, die die Dynamik der stark wechselwirkenden Quarks und Gluonen beschreibt.

Scheinbar naheliegend ist folgende Definition der Quark-Wigner-Funktion:

$$\begin{aligned} \tilde{G}'(X, k) &:= \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle \psi(X + u/2) \bar{\psi}(X - u/2) \rangle \\ &= \langle \psi(X) (2\pi)^4 \delta(k - \hat{k}) \bar{\psi}(X) \rangle \end{aligned} \quad (2.57)$$

mit dem Ableitungsoperator $\hat{k} := \frac{1}{2i} (\partial_X - \partial_X^\dagger)$. Bemerkenswert ist, daß \tilde{G}' eine $N \times N$ -Matrix im Farbraum und eine 4×4 -Matrix im Spinorraum darstellt. Die δ -Funktion in (2.57) erzwingt die Identifikation des Impulses k mit der partiellen Ableitung, welche wiederum den quantenmechanischen Operator

des zu X *kanonisch konjugierten* Impulses darstellt. Dieser ist aber in einer Eichtheorie keine Meßgröße, da er eichabhängig ist. Mit der Geschwindigkeit eines Teilchens verknüpft ist der *kinetische* Impuls $\vec{\pi} = m\vec{v}$, und diesem entspricht in der Quantenmechanik der Operator der kovarianten Ableitung (2.52). Um also eine Phasenraum-Funktion zu erhalten, muß die Definition der Quark-Wigner-Funktion folgendermaßen abgeändert werden [2]:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(X, k) &:= \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle e^{\frac{u}{2} \cdot D(X)} \psi(X) e^{-\frac{u}{2} \cdot D(X)} \bar{\psi}(X) \rangle \\ &= \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[A](X, X + u/2) \psi(X + u/2) \bar{\psi}(X - u/2) U[A](X - u/2, X) \rangle.\end{aligned}\quad (2.58)$$

Die Wirkung der kovarianten Ableitung auf die Quark-Funktionen bewirkt also nicht nur die Verschiebung der Argumente von X nach $X \pm u/2$, sondern produziert zusätzlich die Paralleltransport-Operatoren

$$U[A](x, x') := P \exp \left[ig \int_0^1 ds (x - x')_\mu A^\mu(x' + s(x - x')) \right]. \quad (2.59)$$

P steht dabei für die Pfadordnung der A^μ -Felder (auf Grund ihrer Farbstruktur vertauschen sie nicht miteinander). Die folgenden Eigenschaften der Paralleltransport-Operatoren werden sich als für uns nützlich erweisen:

Die Inversionsregel

$$U^{-1}[A](x, y) = U[A](y, x); \quad (2.60)$$

die Verknüpfungsregel

$$U[A](x, u) U[A](u, y) = U[A](x, y) \quad (2.61)$$

für drei Punkte x , y und u , die auf einer Geraden liegen; die Ableitungsregel nach einem der Endpunkte [13], [2]:

$$\begin{aligned}\partial_\mu^x U[A](x, x') &= \\ &ig \left[A_\mu(x) - (x - x')^\nu \int_0^1 ds s U[A](x, z(s)) F_{\nu\mu}(z(s)) U[A](z(s), x) \right] U[A](x, x'),\end{aligned}\quad (2.62)$$

wobei $z(s)$ auf geradem Weg von x' nach x läuft:

$$z(s) := x' + s(x - x'); \quad (2.63)$$

und schließlich das Verhalten unter Eichtransformationen [14]:

$$U[A](y, x) \rightarrow V(y) U[A](y, x) V^{-1}(x). \quad (2.64)$$

Die letzte Regel gilt auch für Operatoren $U(x, y)$ mit beliebiger Kontur, die die Punkte x und y verbindet, anstatt entlang der Geraden, die durch x und y bestimmt ist.

Für das Transformationsverhalten der Wigner-Funktion (2.58) ergibt sich aus (2.47) und (2.64)

$$\tilde{G}(X, k) \rightarrow V(X) \tilde{G}(X, k) V^{-1}(X). \quad (2.65)$$

Die Quark-Wigner-Funktion transformiert sich also lokal eichkovariant. Dagegen besitzt die Funktion (2.57) kein lokales Transformationsverhalten. Das ist ein weiterer Pluspunkt für die durch (2.58) getroffene Wahl, da nur ein lokales Transformationsverhalten z.B. die Zerlegung der Farbmatrix in ihre irreduziblen Bestandteile erlaubt [15]. In diesem Zusammenhang ist folgendes bemerkenswert: Die Wahl der Paralleltransport-Operatoren in (2.58) ist eindeutig als die Verbindung entlang gerader Linien bestimmt, wenn man fordert, daß k den kinetischen Impuls darstellen soll. Verlangt man lediglich, daß sich die Quark-Wigner-Funktion lokal eichkovariant transformiert [16], so sind nur Start- und Endpunkte der U -Operatoren bestimmt, nicht aber die Kontur, die die Punkte verbindet.

Wie steht es nun mit den Relationen für Quarks, die den klassischen Transportgleichungen (2.4) und (2.7) entsprechen? In [2] wurde für den Quark-Wigner-Operator

$$\hat{G}(X, k) := \int d^4u e^{ik \cdot u} U[\hat{A}](X, X + u/2) \hat{\psi}(X + u/2) \hat{\psi}(X - u/2) U[\hat{A}](X - u/2, X) \quad (2.66)$$

eine Gleichung abgeleitet, die der klassischen Klimontovich-Gleichung entspricht. Obwohl auch die Quanten-Version der Vlasov-Boltzmann-Gleichung für Quarks und Gluonen häufig verwendet wird (z.B. [17]), gibt es, zumindest was den Stoßterm betrifft, bisher keine Ableitung dieser Gleichung *from first principles*, d.h. aus den zugrundeliegenden Bewegungsgleichungen für Quarks und Gluonen. Man beschränkt sich darauf, die Gleichung, insbesondere die Stoßterme, so anzuschreiben, wie man sie für Nicht-Eichtheorien kennt (siehe letzter Abschnitt).

Was die Berechnung der Vlasov-Boltzmann-Gleichung so schwierig macht, ist die Tatsache, daß sich die Quark-Wigner-Funktion (2.58) nicht aus einer Zwei-Punkt-Funktion ergibt — für diese ließe sich aus der Dyson-Schwinger-Gleichung eine Transportgleichung gewinnen —, sondern aus einer Mischung aus beliebig hohen n -Punkt-Funktionen. Entwickelt man (2.58) nach Potenzen der Kopplungskonstante g , so sieht man, daß mit jeder Ordnung in g neue n -Punkt-Funktionen hinzukommen. Dagegen ist die Funktion (2.57) eine echte Zwei-Punkt-Funktion. Während sich also (2.57) nicht lokal eichkovariant transformiert und die dort auftretende Größe k nicht den kinetischen Impuls darstellt, ist die Wigner-Funktion

(2.58), anders als bei Theorien ohne Eichfreiheit, nicht die Wigner-Transformierte einer Zwei-Punkt-Funktion.

Die Eichfreiheit der Theorie, die uns dieses Problem beschert hat, weist aber zugleich auch einen Ausweg aus diesem Dilemma. Ohne den physikalischen Gehalt der Theorie einzuschränken, haben wir nämlich die Freiheit, eine Eichung zu wählen, in der sich die Wigner-Funktion möglichst einfach darstellt. Da die unerwünschten höheren n -Punkt-Funktionen durch Paralleltransport-Operatoren ins Spiel gebracht werden, wählen wir eine Eichung, in der sich die U -Operatoren auf Eins reduzieren, genauer

$$U[A](y, X) = 1 \quad (2.67)$$

für beliebige y . In dieser Eichung reduziert sich die Quark-Wigner-Funktion (2.58) auf den Ausdruck (2.57). Dafür läßt sich eine Bewegungsgleichung durch Wigner-Transformation der Dyson-Schwinger-Gleichung erhalten. Trotzdem betrachten wir immer noch die eichkovariante Wigner-Funktion (2.58), wir haben nur eine Eichung gewählt, in der sie einfach zu handhaben ist. Das äußert sich natürlich darin, daß wir für die Dyson-Schwinger-Gleichung keine Freiheit der Eichwahl mehr haben. Um eine Bewegungsgleichung zu gewinnen, die wirklich für die eichkovariante Funktion (2.58) (in der durch (2.67) definierten Eichung) gilt, muß die Dyson-Schwinger-Gleichung, insbesondere die darin vorkommende Selbstenergie, in der Eichung (2.67) dargestellt werden. Würden wir uns für die Funktion (2.57) anstatt für (2.58) interessieren, so hätten wir bei der Formulierung der Dyson-Schwinger-Gleichung die Wahl, in welcher Eichung wir arbeiten wollen. Diese Freiheit haben wir in unserem Fall sozusagen schon aufgebraucht. Man kann das auch unter einem etwas anderen Blickwinkel betrachten: Nehmen wir an, die Bewegungsgleichungen für (2.58) und (2.57) wären uns in beliebigen Eichungen bekannt — was eben zumindest für (2.58) leider nicht der Fall ist. Dann gibt es genau eine Eichwahl, in der die Bewegungsgleichung für (2.58) mit derjenigen für (2.57) übereinstimmt, und das ist die durch (2.67) definierte Eichung.

Um keinen falschen Eindruck zu erwecken, muß die Eichbedingung noch etwas schärfer gefaßt werden. Es ist natürlich unmöglich, die Bedingung (2.67) für beliebige y und beliebige X zu fordern. Genaugenommen betrachten wir die Funktion

$$\tilde{G}_z(X, k) := \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[A](z, X + u/2) \psi(X + u/2) \bar{\psi}(X - u/2) U[A](X - u/2, z) \rangle. \quad (2.68)$$

Sie ist für $z = X$ mit unserer Quark-Wigner-Funktion identisch. In der Eichung

$$U[A](y, z) = 1, \quad (2.69)$$

die für *beliebiges* y und *festes* z gilt, fällt (2.68) mit (2.57) zusammen. Die Unterscheidung des Eichpunktes z von der Schwerpunktsvariablen X ist insofern wichtig, als bei der Dyson-Schwinger-Gleichung auch nach dem Schwerpunkt variiert

wird.⁷ Da die Dyson-Schwinger-Gleichung aber in einer festen Eichung formuliert werden muß, darf nicht gleichzeitig nach dem Eichpunkt variiert werden. Auf diese Unterscheidung kommen wir in Kapitel 5 wieder zurück.

Der Hauptteil dieser Arbeit dreht sich um die durch (2.69) definierte Eichung, in der sich die Größe (2.68), bei der in anderen Eichungen beliebig hohe n -Punkt-Funktionen vorkommen, auf den Ausdruck (2.57) reduzieren läßt. Der Einfachheit halber wählen wir unser Koordinatensystem so, daß z mit dem Ursprung zusammenfällt: $z = 0$. Alle Formeln, die wir im folgenden erarbeiten, lassen sich problemlos wieder in ein anderes Koordinatensystem transformieren.

Wir interessieren uns also für eine Eichung, in der

$$U[A](x, 0) = 1 \quad (2.70)$$

für alle x erfüllt ist. Um zu sehen, was diese Bedingung für die Eichfelder A selbst bedeutet, suchen wir zunächst nach einer geeigneten Eichtransformation V , die die Eichfelder von einer beliebigen Starteichung B so transformiert, daß $A = {}^V B$ die Bedingung (2.70) erfüllt. Es soll also gelten:

$$U[{}^V B](x, 0) = 1. \quad (2.71)$$

Unter Ausnutzung des Transformationsverhaltens von U unter Eichtransformationen (2.64) kann man dies umformen in

$$V(x) U[B](x, 0) V^{-1}(0) = 1 \quad (2.72)$$

bzw. mit (2.60)

$$V(x) = V(0) U[B](0, x). \quad (2.73)$$

Damit ergibt sich für das transformierte Eichfeld A die Feldstärkeformel

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= V(x) \left(B_\mu(x) - \frac{1}{ig} \partial_\mu^x \right) V^{-1}(x) \\ &= V(0) U[B](0, x) \left(B_\mu(x) - \frac{1}{ig} \partial_\mu^x \right) U[B](x, 0) V^{-1}(0) \\ &= V(0) U[B](0, x) \\ &\quad \times \left[B_\mu(x) - B_\mu(x) + x^\nu \int_0^1 ds s U[B](x, sx) F_{\nu\mu}[B](sx) U[B](sx, x) \right] \\ &\quad \times U[B](x, 0) V^{-1}(0) \end{aligned}$$

⁷Die Wirkung des freien Dirac-Operators $i\gamma_\mu \partial_x^\mu - m$ auf eine Zwei-Punkt-Funktion $\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle$ teilt sich auf in Ableitungen nach Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\partial_x^\mu = \frac{1}{2} \partial_{(x+y)/2}^\mu + \partial_{x-y}^\mu.$$

$$\begin{aligned}
&= x^\nu \int_0^1 ds s V(0) U[B](0, sx) F_{\nu\mu}[B](sx) U[B](sx, 0) V^{-1}(0) \\
&= x^\nu \int_0^1 ds s V(sx) F_{\nu\mu}[B](sx) V^{-1}(sx) \\
&= x^\nu \int_0^1 ds s F_{\nu\mu}[A](sx), \tag{2.74}
\end{aligned}$$

wobei Ableitungs- und Verknüpfungsregel für Paralleltransport-Operatoren (2.62) und (2.61) sowie das kovariante Transformationsverhalten der Feldstärke (2.54) ausgenutzt werden. Die durch (2.70) definierte Eichung erlaubt es also, die Vektorpotentiale A_μ durch die Feldstärken $F_{\mu\nu}$ auszudrücken. Diese charakteristische Eigenschaft wird uns im folgenden noch öfters von Nutzen sein. Kontrahiert man (2.74) mit x^μ , so ergibt sich aus der Antisymmetrie der Feldstärke der einfache Zusammenhang

$$x^\mu A_\mu(x) = 0. \tag{2.75}$$

Die geometrische Interpretation, daß die radiale Komponente des Vektorfeldes verschwindet, legt den Namen *radiale Eichung* nahe. (Geleitet wird man hierbei natürlich von der Interpretation im Euklidischen Raum.) Tatsächlich ist diese Eichung schon lange [18]-[23] und unter vielerlei Namen (Fock-Schwinger-, Kontur-, homogene Eichung) bekannt. Verwendung finden insbesondere die Feldstärkeformel und die Möglichkeit, bestimmte kovariante Ableitungen durch partielle zu ersetzen [23], was auch uns zu dieser Eichung geführt hat.

Die bisherigen Überlegungen betrafen die klassische Wellentheorie (nicht-)abelscher Eichfelder. Der logisch nächste Schritt wäre nun die Quantisierung der eichfixierten Felder und die Ableitung von Feynman-Regeln in radialer Eichung. Auch die meisten Lehrbücher über Quantenfeldtheorie [7] scheinen nahezu legen, daß die Quantisierung in einer beliebigen Eichung problemlos möglich ist. Tatsächlich ist die Formulierung einer Störungstheorie in kovarianten Eichungen seit längerem etabliert (siehe z.B. [12]). Dagegen finden die spezifischen Probleme, die bei nicht-kovarianten Eichungen auftreten, nur selten Erwähnung. Deshalb sollen sie im folgenden ausführlich dargestellt werden, und zwar anhand von Beispielen, über die mehr bekannt ist als über die radiale Eichung. Mit den so gewonnenen Erkenntnissen werden wir uns danach wieder unserem speziellen Fall einer nicht-kovarianten Eichung zuwenden.

Bevor wir der Transporttheorie fürs erste den Rücken kehren, um uns mit Eichproblemen zu befassen, wollen wir noch auf einige alternative Formulierungen der Nicht-Gleichgewichtsdynamik für Quarks und Gluonen eingehen. Es stellt sich natürlich die Frage, inwiefern die Wahl von (2.58) als quantenphysikalisches Analogon der klassischen Ein-Teilchen-Phasenraum-Verteilungsfunktion eindeu-

tig ist. Zudem haben wir noch kein Wort darüber verloren, wie die Gluon-Wigner-Funktion definiert ist.

Bleiben wir zunächst bei den Quarks. In [24] wird als Alternative zu (2.58) die *equal time*-Wigner-Funktion vorgeschlagen:

$$W_{\text{et}}(T, \vec{X}; \vec{k}) := \int d^3u e^{i\vec{k}\cdot\vec{u}} \langle U[A](T, \vec{X}; T, \vec{X} + \vec{u}/2) \psi(T, \vec{X} + \vec{u}/2) \\ \times \bar{\psi}(T, \vec{X} - \vec{u}/2) U[A](T, \vec{X} - \vec{u}/2; T, \vec{X}) \rangle. \quad (2.76)$$

Man betrachtet also hier die Zwei-Punkt-Funktion für gleiche Zeitargumente und Wigner-transformiert nur bezüglich der Raumkomponenten. In der Wigner-Funktion (2.76) kommen deshalb nur die räumlichen Impulskomponenten vor. Geleitet wird man hier u.a. von der Vorstellung, daß sich die Energiekomponente über eine Massenschalenbedingung ohnehin eindeutig aus dem räumlichen Impuls ergibt. Es ist allerdings fraglich, ob sich die wesentlichen Prozesse, die sich beim Äquilibrationsvorgang von hochenergetischen Quantensystemen abspielen, durch Teilchen auf der (evtl. durch Mediumeffekte modifizierten) Massenschale beschreiben lassen [10]. Die Funktion (2.76) entsteht aus (2.58) durch Integration über die Energiekomponente k_0 . Wenn man nicht von vornherein einen Ansatz über den Zusammenhang von k_0 und \vec{k} hineinsteckt — z.B. eben eine Massenschalenbedingung —, dann verliert man offensichtlich durch Ausintegration der k_0 -Komponente Informationen über das System. Das wird z.Z. intensiv untersucht [25]. In jedem Fall ist ein Nachteil der *equal time*-Formulierung, daß die Lorentz-Invarianz explizit gebrochen wird. Ein Vorteil liegt darin, daß mögliche Anfangskorrelationen des betrachteten Vielteilchensystems (z.B. zwei geordnete Kerne zu Beginn einer Schwerionenkollision) leichter berücksichtigt werden können [26]. Das liegt im wesentlichen daran, daß in der Zwei-Punkt-Funktion in (2.58) beliebige Zeitargumente vorkommen, daß also in die Konstruktion der Lorentz-invarianten Quark-Wigner-Funktion Informationen über Vergangenheit und Zukunft des Systems eingehen. Trotzdem wird auch die Wigner-Funktion (2.58) kein unphysikalisches akausales Verhalten zeigen, wenn ihre Bewegungsgleichung aus den die Kausalität respektierenden Bewegungsgleichungen für n -Punkt-Funktionen abgeleitet wird.

Abgesehen von der eben dargestellten Alternative ist die Wigner-Funktion (2.58) eindeutig dadurch bestimmt, daß k (oder zumindest \vec{k}) den kinetischen Impuls darstellen und daß Integration über die Impulse und Summation über alle inneren (Farb- und Spinor-)Indizes die Teilchendichte $\bar{\psi}\psi$ liefern soll. Bei Gluonen liegt der Fall komplizierter, da man keine eichinvariante Gluondichte definieren kann. Insofern hat man zunächst eine beträchtliche Freiheit bei der Definition einer Gluon-Wigner-Funktion. Da wir auf Dyson-Schwinger-Gleichungen für Quarks und Gluonen (in radialer Eichung) abzielen und dort Zwei-Punkt-Funktionen der Vektorpotentiale A_μ auftreten, fällt unsere Wahl für die Gluon-Wigner-Funktion

auf

$$\tilde{D}^{\mu\nu}(X, k) := \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[A](X, X+u/2) A^\mu(X+u/2) U[A](X, X-u/2) A^\nu(X-u/2) \rangle. \quad (2.77)$$

$U A$ steht dabei für das eichtransformierte Feld (vgl. (2.51)). Genau wie im Fall der Quarks definieren wir die Funktion

$$\tilde{D}_z^{\mu\nu}(X, k) := \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[A](z, X+u/2) A^\mu(X+u/2) U[A](z, X-u/2) A^\nu(X-u/2) \rangle, \quad (2.78)$$

die für $z = X$ mit der Gluon-Wigner-Funktion identisch ist. In der radialen Eichung $(x-z)_\mu A^\mu(x) = 0$ geht der Erwartungswert in (2.78) in die gluonische Zwei-Punkt-Funktion über.

Alternativ dazu wird in manchen Arbeiten (z.B. [2]) die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ an Stelle des Vektorpotentials für die Definition einer Gluon-Wigner-Funktion verwendet, da sich $F_{\mu\nu}$ im Gegensatz zu A_μ gemäß (2.54) homogen eichkovariant transformiert:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{\mu\nu}(X, k) := & \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[A](X, X+u/2) F^{\mu\lambda}(X+u/2) U[A](X+u/2, X) \\ & \otimes U[A](X, X-u/2) F_\lambda{}^\nu(X-u/2) U[A](X-u/2, X) \rangle. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Der Operator \otimes soll andeuten, daß an dieser Stelle keine Matrixmultiplikation der Farbmatriizen erfolgt. $\Gamma^{\mu\nu}$ besitzt also vier (nicht explizit angegebene) Farbindizes. Bis jetzt gibt es noch keine Klarheit darüber, welche der beiden Größen (2.77) oder (2.79) geeigneter für die Beschreibung von Transportphänomenen ist. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang, daß uns die Formulierung in radialer Eichung immer noch die Möglichkeit offen läßt, die Feldstärke-Version zu benutzen, da die in den Dyson-Schwinger-Gleichungen auftretenden A_μ -Zwei-Punkt-Funktionen mit Hilfe der Feldstärkeformel (2.74) in $F_{\mu\nu}$ -Zwei-Punkt-Funktionen verwandelt werden können.

Eine weitere alternative Version der Gluon-Wigner-Funktion findet sich in [27]. Dort wird das Problem, daß in (2.58) beliebig hohe n -Punkt-Funktionen auftreten, näherungsweise dadurch umgangen, daß man an Stelle von $U[A]$ nur den Paralleltransport-Operator des Erwartungswertes $U[\langle A \rangle]$ betrachtet. Der Operator des Gluonfeldes \hat{A}_μ wird also aufgeteilt in Erwartungswert (Hintergrundfeld) und Quantenfluktuation

$$\hat{A}_\mu = \langle A_\mu \rangle + \hat{a}_\mu, \quad (2.80)$$

und die Gluon-Wigner-Funktion wird definiert als

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\text{bg}}^{\mu\nu}(X, k) := & \int d^4u e^{ik \cdot u} \langle U[\langle A \rangle](X, X+u/2) \hat{a}^\mu(X+u/2) U[\langle A \rangle](X+u/2, X) \\ & \otimes U[\langle A \rangle](X, X-u/2) \hat{a}^\nu(X-u/2) U[\langle A \rangle](X-u/2, X) \rangle. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Diese Funktion transformiert sich lokal eichkovariant unter *klassischen* Eichtransformationen V_{kl} . Das ergibt sich aus dem Transformationsverhalten (2.64) und aus

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &\rightarrow V_{kl}(x) \left(\hat{A}_\mu(x) - \frac{1}{ig} \partial_\mu^x \right) V_{kl}^{-1}(x) \\ &= \underbrace{V_{kl}(x) \left(\langle A_\mu(x) \rangle - \frac{1}{ig} \partial_\mu^x \right) V_{kl}^{-1}(x)}_{V_{kl} \langle A_\mu(x) \rangle} + V_{kl}(x) \hat{a}_\mu(x) V_{kl}^{-1}(x), \end{aligned} \quad (2.82)$$

folglich

$$\hat{a}_\mu(x) \rightarrow V_{kl}(x) \hat{a}_\mu(x) V_{kl}^{-1}(x). \quad (2.83)$$

An Stelle der Paralleltransport-Operatoren mit dem vollen Quantenfeld nur das Hintergrundfeld zu berücksichtigen, ist natürlich eine Näherung, die den Anwendungsbereich der so erhaltenen Gleichungen [27] begrenzt. Insbesondere ist es schwierig, Korrekturen zu dieser Näherung zu berechnen, um ihren Gültigkeitsbereich auszuloten.

Nach diesem Überblick über die Ansätze zur Beschreibung eines Systems von Quarks und Gluonen im Nicht-Gleichgewicht wenden wir uns den Problemen zu, auf die man bei der Formulierung einer quantisierten Eichtheorie in nicht-kovarianten Eichungen stößt. Dabei werden zunächst allgemeine Betrachtungen breiten Raum einnehmen (Kapitel 3) bevor wir in Kapitel 4 wieder zur radialen Eichung zurückkehren. Abgesehen davon, daß die Ergebnisse des nächsten Kapitels für die Untersuchung der radialen Eichung wichtig sind, gibt es einen weiteren Grund, warum wir zunächst scheinbar so weit von der Eichung abschweifen, die für transporttheoretische Betrachtungen besonders geeignet erscheint: Auch andere nicht-kovariante Eichungen kommen bei der Beschreibung von farbwchselwirkenden Vielteilchensystemen zur Anwendung. Ohne näher darauf einzugehen, seien als Beispiele [28] und [29] erwähnt. Bei [28] wird die temporale Eichung $A_0 = 0$ im kanonischen Formalismus (vgl. Abschnitt 3.6) verwendet. In [29] kommt die allgemeine axiale Eichung $n_\mu A^\mu = 0$ zum Einsatz. Dabei ist n_μ ein konstanter Vierervektor, der in [29] in der Nähe des Lichtkegels ($n^2 \approx 0$) gewählt wird.

Do schriefs jetz hundertmohl:

*„Ich soll bei Ruut su winnisch waade wie bei Gröön,
wenn't Jähl weet, will ich jonn.“*

Mer hätt sich vill ze schnell ahn all dä Müll jewönnt.

Wolfgang Niedecken, Hundertmohl

3 Quantisierung nicht-kovarianter Eichungen

Rekapitulieren wir kurz die Versprechungen der Lehrbücher [7]. Die Quantisierung einer Eichtheorie erfordert folgende Schritte:

1. Wahl einer Eichbedingung. Sie hat i.a. die Form

$$f_\mu A_a^\mu = 0. \quad (3.1)$$

Bekannte und für uns interessante Beispiele sind die kovariante ($f_\mu = \partial_\mu$), die temporale ($f_\mu = (1, 0, 0, 0)$), die Coulomb- ($f_\mu = g_{\mu i} \partial^i$) und natürlich die radiale ($f_\mu = x_\mu$) Eichung. Der bis jetzt eichinvarianten Lagrange-Dichte \mathcal{L} wird ein Eichterm hinzugefügt

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \frac{1}{2\alpha} A_a^\mu f_\mu f_\nu A_a^\nu. \quad (3.2)$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ ergibt sich die strikte Realisierung der Eichbedingung, d.h. alle n -Punkt-Funktionen erfüllen dann

$$f_\mu \langle A_a^\mu A_b^\nu \dots \rangle = 0. \quad (3.3)$$

2. Berechnung der Faddeev-Popov-Matrix

$$M[A]_{ab}(x, y) = \frac{\delta \left(f_\mu U_\omega A_a^\mu(x) \right)}{\delta \omega^b(y)} = f_\mu \mathcal{D}_{ab}^\mu[A](x) \delta(x - y). \quad (3.4)$$

Dabei parametrisiert ω eine infinitesimale Eichtransformation

$$U_\omega = e^{ig\omega} = 1 + ig\omega, \quad (3.5)$$

und

$$\mathcal{D}_{ab}^\mu[A](x) = \partial_x^\mu \delta_{ab} - gf_{abc} A_c^\mu(x) \quad (3.6)$$

ist die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung.

3. Am einfachsten erfolgt die Quantisierung im Pfadintegral-Formalismus. Alle Greenschen Funktionen der Theorie ergeben sich dabei aus Funktionalableitungen des erzeugenden Funktionals

$$W[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}[A, \psi, \bar{\psi}] \det M[A] \exp \left(i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{eff}}[A, \psi, \bar{\psi}] + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right). \quad (3.7)$$

Insbesondere lassen sich die Vertizes der Theorie direkt von den Wechselwirkungstermen in \mathcal{L} und M ablesen, und der freie Propagator D des Eichfeldes ergibt sich durch Inversion des Operators, der in der freien Wirkung (einschließlich Eichfixierungsterm) auftaucht

$$(g_{\mu\nu} \square_x - \partial_\mu^x \partial_\nu^x + \frac{1}{\alpha} f_\mu f_\nu) D_{ab}^{\nu\lambda}(x, y) = i g_\mu^\lambda \delta_{ab} \delta(x - y). \quad (3.8)$$

Wie sich herausstellen wird, versagt die beschriebene Methode bei der temporalen Eichung ($A_0 = 0$), weil sie nicht in der Lage ist, einen wohldefinierten Propagator zu bestimmen. Ebenso versagt sie bei der Coulomb-Eichung ($\partial_i A_i = 0$), weil sie nicht in der Lage ist, alle Vertizes der Theorie zu liefern.

3.1 Die temporale Eichung in ihrer naiven Version

Von besonderem Interesse ist die temporale Eichung u.a. deshalb, weil hier die Eichfelder von den Geistfeldern zu entkoppeln scheinen. (Diese vorsichtige Formulierung ist durchaus angemessen.) Gehen wir zunächst den eben beschriebenen Standardweg:

Der Eichfixierungsterm ist

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = \frac{1}{2\alpha} (A_0^a)^2 \quad (3.9)$$

und die Faddeev-Popov-Matrix

$$M_{ab}(x, y) = \mathcal{D}_{ab}^0(x) \delta(x - y) = \delta_{ab} \partial_x^0 \delta(x - y). \quad (3.10)$$

Dabei wurde im letzten Schritt von der Eichbedingung

$$A_0 = 0 \quad (3.11)$$

Gebrauch gemacht, was natürlich nur für $\alpha \rightarrow 0$ richtig ist. Wir werden uns im folgenden aber ohnehin nur mit diesem Fall auseinandersetzen. Die in (3.10) berechnete Matrix ist also unabhängig von den Eichfeldern. Wenden wir uns als nächstes dem freien Eichfeld-Propagator zu. Üblicherweise wird seine Darstellung

\tilde{D} im Fourierraum berechnet. Die Bestimmungsgleichung ist somit⁸

$$(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu - \frac{1}{\alpha}g_{\mu 0}g_{0\nu})\tilde{D}^{\nu\lambda}(k) = -i g_\mu{}^\lambda. \quad (3.12)$$

Die formale Lösung dieser (im Impulsraum algebraischen) Gleichung ist

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = -i g_{\mu i} \left[\frac{1}{k^2} \left(g^{ij} + \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) - \frac{1}{k_0^2} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right] g_{j\nu} + i\alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k_0^2}. \quad (3.13)$$

Für den für uns interessanten Fall $\alpha \rightarrow 0$ ergibt sich die etwas übersichtlichere Form

$$\tilde{D}^{ij}(k) = -\frac{i}{k^2} \left(g^{ij} + \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) + \frac{i}{k_0^2} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \quad (3.14)$$

und

$$\tilde{D}^{\mu 0}(k) = \tilde{D}^{0\mu}(k) = 0. \quad (3.15)$$

Die letzte Gleichung spiegelt offenbar die Eichbedingung wider, während der nichtverschwindende Raum-Raum-Anteil (3.14) des Propagators aus zwei Moden besteht: Einer zu \vec{k} transversalen Mode, die sich mit $1/k^2$ ausbreitet,⁹ und einer Longitudinal-Mode, die mit $1/k_0^2$ propagiert. Die Interpretation des Poles von $1/k^2$ bereitet keine weiteren Schwierigkeiten; die Forderung nach Kausalität der Theorie erzwingt folgende Ersetzung des bis jetzt rein formalen Ausdrucks:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 + i\eta} \quad , \quad \eta \rightarrow +0. \quad (3.16)$$

Alle Probleme der temporalen Eichung kommen von dem Pol in $1/k_0^2$. Weder der Pfadintegral-Formalismus (in der hier dargestellten, den Lehrbüchern entnommenen naiven Form) noch ein zusätzlicher physikalischer Input (wie etwa die Forderung nach Kausalität) liefert eine Polvorschrift. Historisch betrachtet war die Behandlung dieses Problems zunächst von der Idee der Machbarkeit dominiert anstatt von der Suche nach den Ursachen. Wenn die Physik schon keine Aussagen darüber liefert, wie dieser Pol zu behandeln sei, dann könne man wohl mit jeder Vorschrift glücklich werden, insbesondere mit einer bei praktischen Rechnungen einfach zu handhabenden. Konkret bietet sich hier die Hauptwert-Vorschrift an [30]:

$$\frac{1}{k_0^2} \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(k_0 + i\epsilon)^2} + \frac{1}{(k_0 - i\epsilon)^2} \right] \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Um die Gültigkeit dieser Polvorschrift zu testen, wurde ein Wilson-Loop in kovarianter Eichung einerseits und in temporaler Eichung mit Hauptwert-Vorschrift

⁸Da der freie Eichfeld-Propagators stets proportional zur Identität in der adjungierten Darstellung δ^{ab} ist, unterdrücken wir die Farbstruktur im folgenden.

⁹Übrigens liegt hier kein Vorzeichenfehler vor: In der Tat ist $g_{ij} + k_i k_j / \vec{k}^2$ und nicht $g_{ij} - k_i k_j / \vec{k}^2$ der Transversal-Projektor, und zwar wegen $g_{ij} = -\delta_{ij}$.

andererseits bis zur vierten Ordnung in der Kopplungskonstante berechnet [31]. Da wir uns im nächsten Kapitel noch ausführlich mit Wilson-Loops beschäftigen werden, schieben wir die Definition bis dahin auf und halten einstweilen nur fest, daß Wilson-Loops eichinvariante Objekte darstellen und ihr Wert deshalb in allen Eichungen übereinstimmen sollte. Genau das ist bei der Hauptwert-Vorschrift nicht der Fall; das Ergebnis stimmt nicht mit dem der kovarianten Eichung überein. In [31] wurde darüber hinaus eine mögliche Form des longitudinalen Anteils D_L des temporalen Propagators bestimmt, die das Resultat der kovarianten Eichung reproduziert. Sie ist nicht translationsinvariant, kann also demzufolge nicht im Impulsraum dargestellt werden. Die allgemeinste in [31] angegebene Form ist

$$D_L^{ij}(x, y) = -\frac{i}{2}(|x_0 - y_0| \pm (x_0 + y_0) + C) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \quad (3.18)$$

mit einer beliebigen Konstanten C . Demgegenüber liefert die Hauptwert-Vorschrift im Ortsraum

$$-\frac{i}{2}|x_0 - y_0| \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}. \quad (3.19)$$

Die Brechung der Translationsinvarianz ist natürlich ein unliebsames Ergebnis, weil dadurch alle praktischen Rechnungen stark verkompliziert werden. Deshalb wurden mehrere alternative Polvorschriften vorgeschlagen, die für den in [31] behandelten Fall das richtige Ergebnis liefern (für eine Übersicht siehe [32]). Bis jetzt steht aber ein schlüssiger Beweis dafür aus, daß eine (oder mehrere) dieser Vorschriften für alle eichinvarianten Objekte in allen Ordnungen der Kopplungskonstante das jeweils gleiche Resultat liefern wie die Berechnung in kovarianter Eichung, daß sie also mit den kovarianten Ergebnissen „verträglich“ sind. Das gleiche gilt übrigens auch für den in [31] vorgeschlagenen Propagator (3.18). Wenden wir uns daher ab vom (mehr oder weniger) qualifizierten Raten eines temporalen Propagators und versuchen, systematischer an das Problem heranzugehen. Hier bieten sich zwei Richtungen an. Zum einen kann man allgemein untersuchen, welche Propagatoren und Vertizes mit den kovarianten „verträglich“ sind. Zum anderen kann man klären, woher der Pol in $1/k_0^2$ überhaupt kommt. Tatsächlich sind die Antworten auf beide Fragen für die Untersuchung der radialen Eichung, für die wir uns ja eigentlich interessieren, von Belang.

3.2 Die allgemeine Struktur von Propagatoren

Beginnen wir mit dem Studium miteinander „verträglicher“ Feynman-Regeln. In [33] wird folgendes Äquivalenztheorem aufgestellt: Gibt man einen Eichpropagator

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu} - a_\mu(k)k_\nu + k_\mu a_\nu(-k)}{k^2 + i\eta}, \quad (3.20)$$

einen Geistvertex

$$gf^{abc} \{ [(a \cdot k) - 1]k_\mu - k^2 a_\mu \} \quad (3.21)$$

und ansonsten die üblichen Feynman-Regeln vor, so sind alle eichinvarianten Größen unabhängig von $a_\mu(k)$, solange $a_\mu(k)$ nicht singulär ist. Insbesondere ergeben sich für $a_\mu = 0$ die Feynman-Regeln für die Feynman-Eichung (kovariante Eichung mit Eichparameter $\alpha = 1$). Das Äquivalenztheorem postuliert also die „Verträglichkeit“ aller so konstruierten Feynman-Regeln mit der kovarianten Eichung. Im nächsten Kapitel werden wir dieses Theorem auf die von uns zu entwickelnden radialen Feynman-Regeln erweitern. (Eine Verallgemeinerung ist nötig, da in der hier präsentierten Form nur translationsinvariante Propagatoren erfaßt werden. Da die radiale Eichbedingung selbst schon die Translationsinvarianz bricht, kann man nicht erwarten, daß ein translationsinvarianter radialer Propagator existiert.) Wenden wir also das Äquivalenztheorem auf die temporale Eichung an. Tatsächlich liefert die Wahl

$$a_0(k) = \frac{1}{2k_0} \quad \text{und} \quad a_i(k) = -\frac{k_i}{2k_0^2} \quad (3.22)$$

oder kurz

$$a_\mu(k) = \frac{g_{\mu 0}}{k_0} - \frac{k_\mu}{2k_0^2} \quad (3.23)$$

den temporalen Propagator (3.14), (3.15). Allerdings ist a_μ singulär bei $k_0 = 0$, und damit ist das Theorem nicht anwendbar. Das ist zunächst nicht weiter tragisch, da (3.14) ohnehin nur die formale Darstellung des Propagators wiedergibt und man im Ernstfall eine Polvorschrift angeben muß. Versuchen wir also die Hauptwert-Vorschrift zu reproduzieren, um herauszufinden, an welcher Stelle dieser Ansatz zu Inkonsistenzen führt. Offenbar scheint [34]

$$a_\mu(k) = g_{\mu 0} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k_0 + i\epsilon} + \frac{1}{k_0 - i\epsilon} \right] - k_\mu \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(k_0 + i\epsilon)^2} + \frac{1}{(k_0 - i\epsilon)^2} \right] \quad (3.24)$$

dafür eine gute Wahl zu sein. Betrachten wir aber einmal den rein temporalen Anteil

$$\tilde{D}_{00} = -\frac{i}{k^2 + i\eta} \left[-\frac{\epsilon^2}{2(k_0 + i\epsilon)^2} - \frac{\epsilon^2}{2(k_0 - i\epsilon)^2} \right] \quad (3.25)$$

sowie den gemäß (3.21) zugehörigen Geistvertex

$$-gf^{abc} \frac{\epsilon^2 k_\mu + g_{\mu 0} k^2 k_0}{k_0^2 + \epsilon^2}. \quad (3.26)$$

Bei einer naiven Betrachtung würde man folgern, daß man \tilde{D}_{00} (und ebenso die nicht explizit aufgeführten Komponenten \tilde{D}_{0i}) für genügend kleine ϵ vernachlässigen kann und die Geistfelder nur an diese temporalen Moden koppeln, weil der erste Term $\sim k_\mu$ im Zähler von (3.26) für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet. Allerdings gibt

es für jedes beliebig kleine, aber endliche ϵ nicht-verschwindende Beiträge an der kritischen Stelle $k_0 = 0$. Deshalb kann man nicht ausschließen, daß diese Terme in Loop-Integralen einen Beitrag liefern. In der Tat zeigt eine explizite Berechnung des oben erwähnten Wilson-Loops, daß sowohl Geister als auch temporale Moden beitragen [34].

Das Fehlen dieser Beiträge bei den naiven Rechnungen in temporaler Eichung mit Hauptwert-Vorschrift erklärt nun ganz zwanglos die Diskrepanz zu den entsprechenden Rechnungen in kovarianter Eichung. Das Äquivalenztheorem liefert somit ein leistungsfähiges Werkzeug, um die „Verträglichkeit“ von Feynman-Regeln in verschiedenen Eichungen zu prüfen. In diesem Zusammenhang muß darauf hingewiesen werden, daß der Beweis dieses Theorems [33] rein diagrammatisch geführt wird und nicht — wie der Lehrbuch-„Beweis“ für die zu Beginn des Kapitels dargestellte Standard-Prozedur — durch formale Manipulationen an Pfadintegralen. Bedeutet das nun, daß der Pfadintegral-Formalismus zu falschen Ergebnissen führt [35]? Das wäre nicht nur vom ästhetischen Standpunkt aus schade, zumal die Pfadintegrale im Vergleich zur kanonischen Quantisierung wesentlich anschaulicher den Übergang von der klassischen zur Quantenphysik beschreiben. Bekanntlich ist die Quantisierung nicht-abelscher Eichfelder zunächst im Pfadintegral-Zugang gelungen — zumindest in kovarianter Eichung.

Wie wir als nächstes zeigen werden, wird das hier dargestellte Problem — der Pol von $1/k_0^2$ — nicht wirklich durch den Quantisierungsvorgang verursacht, sondern durch eine unvollständige Behandlung der Eichfreiheitsgrade — ein Problem, das also schon auf klassischem Niveau erkennbar sein sollte.

3.3 Die Unvollständigkeit der temporalen Eichung

Gehen wir einmal von den Bauteilen der quantisierten Theorie, den Propagatoren und Vertizes, zurück zur Lagrange-Dichte eines klassischen Yang-Mills-Feldes. Sie hat in temporaler Eichung die Form

$$\mathcal{L}_{\text{temp}} = -\text{Sp}(\dot{A}_i \dot{A}^i) - \frac{1}{2} \text{Sp}(F_{ij} F^{ij}). \quad (3.27)$$

Offenbar ist (3.27) nicht mehr invariant gegen beliebige Eichtransformationen (2.51). Es ist aber leicht zu sehen, daß die Untermenge der zeitlich konstanten Eichtransformationen die Lagrange-Dichte (3.27) invariant läßt. Der letzte Term ist dann ohnehin eichinvariant (er repräsentiert die farb-magnetische Feldenergie), und auch \dot{A}_i transformiert sich in diesem Fall homogen eichkovariant,

$$\partial_x^0 A_i(x) \rightarrow \partial_x^0 V(\vec{x}) \left(A_i(x) - \frac{1}{ig} \partial_i^x \right) V^{-1}(\vec{x}) = V(\vec{x}) \partial_x^0 A_i(x) V^{-1}(\vec{x}), \quad (3.28)$$

also

$$\mathrm{Sp}(\dot{A}_i \dot{A}^i) \rightarrow \mathrm{Sp}(V \dot{A}_i V^{-1} V \dot{A}^i V^{-1}) = \mathrm{Sp}(\dot{A}_i \dot{A}^i). \quad (3.29)$$

Das zeigt, daß durch die temporale Eichung die Eichfreiheitsgrade nur unvollständig entfernt werden. Wie wir gleich sehen werden, ist die Resteichfreiheit bezüglich zeitlich konstanter Transformationen der Grund für den unphysikalischen Pol in $1/k_0^2$; wir haben es also mit einem *Eichpol* zu tun. Um diese Aussage zu belegen, werden wir die Resteichfreiheit fixieren und zeigen, daß das den Eichpol beseitigt. Dazu fordern wir z.B., daß die Vektorfelder *zusätzlich* zur temporalen Eichbedingung der Gleichung

$$\partial_i^x A^i(t_0, \vec{x}) = 0 \quad (3.30)$$

genügen [36]. Dabei ist t_0 eine Konstante. (3.30) fixiert also zu einem festen Zeitpunkt t_0 die (rein räumlichen) Eichtransformationen $V(\vec{x})$. Zunächst erscheint eine Eichbedingung, die nur zu einem festen Zeitpunkt gelten soll, etwas ungewöhnlich. Es ist jedoch anschaulich klar, daß man zur Fixierung rein räumlicher Freiheitsgrade eine rein räumliche Bedingung braucht. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, daß eine Eichbedingung, die für beliebige Zeiten gelten würde, nicht gemeinsam mit der temporalen Eichbedingung realisiert werden könnte, d.h. es fände sich keine Möglichkeit, beliebige Eichfelder so zu transformieren, daß diese dann beide Eichbedingungen erfüllten. Die Bedingung (3.30) oder Vergleichbares (z.B. [37], [38]) ist daher das „Beste“, was man machen kann. Offenbar bricht die Zusatzbedingung (3.30) die Translationsinvarianz in Zeit-Richtung. Die rechentechnischen Komplikationen, die man sich dadurch einhandelt, sind jedoch fast unvermeidlich.¹⁰ Gehen wir also mit unserem neuen Rüstzeug, den beiden Eichbedingungen $A_0 = 0$ und (3.30), den Standardweg der Quantisierung. Die zusätzliche Bedingung impliziert eine zweite Faddeev-Popov-Matrix

$$M_{ab}^{\mathrm{add}}(x, y) = \partial_i^x \mathcal{D}_{ab}^i[A](t_0, \vec{x}) \delta(t_0 - y_0) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.31)$$

Diese Matrix ist nicht unabhängig von den Vektorfeldern A_i ; man bekommt deshalb durch die zusätzliche Eichbedingung eine Kopplung der räumlichen Feldkomponenten an Geisfelder. Letztere „leben“ allerdings nicht in der ganzen vierdimensionalen Raum-Zeit, sondern nur auf einer dreidimensionalen Hyperfläche zum festen Zeitpunkt t_0 . Der freie Eichfeld-Propagator ergibt sich durch Inversion des Operators

$$(g_{\mu\nu} \square_x - \partial_\mu^x \partial_\nu^x) \delta(x - y) + \frac{1}{\alpha_1} g_{\mu 0} g_{0\nu} \delta(x - y) + \frac{1}{\alpha_2} g_{\mu i} \partial_x^i \partial_x^j g_{j\nu} \delta(t_0 - y_0) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.32)$$

¹⁰Eine mögliche Alternative zu (3.30) ist die vollständige Aufgabe der Rotationsinvarianz in den drei räumlichen Richtungen durch entsprechende Eichbedingungen [37]. Wir werden auf diese Möglichkeit nicht weiter eingehen, da sie für unsere Betrachtungen keine neuen Erkenntnisse liefert.

und den anschließenden Grenzübergang $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 0$. Wir ersparen uns hier eine detaillierte Herleitung und behaupten, daß sich nach längerer aber problemloser Rechnung folgende Form ergibt [36]:

$$D^{\mu 0}(x, y) = D^{0\nu}(x, y) = 0 \quad (3.33)$$

und

$$D^{ij}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{-i}{k^2} \left(g^{ij} + \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i \frac{(e^{-ik_0 x_0} - e^{-ik_0 t_0})(e^{ik_0 y_0} - e^{ik_0 t_0})}{k_0^2} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}. \quad (3.34)$$

Wenn wir schon nicht die Rechnung vorführen, so wollen wir doch wenigstens prüfen, ob dieser Propagator unsere beiden Eichbedingungen erfüllt. Die temporale Eichbedingung ist offenbar gerade (3.33). Aber auch, daß

$$\partial_i^x D^{ij}(t_0, \vec{x}; y) = \partial_i^y D^{ji}(x; t_0, \vec{y}) = 0 \quad (3.35)$$

gilt, ist aus (3.34) leicht ersichtlich, da dort für $x_0 = t_0$ oder $y_0 = t_0$ nur die transversale Komponente übrigbleibt. Ein Vergleich mit dem naiven temporalen Propagator (3.14) zeigt, daß nur die longitudinale Komponente verändert wurde. Das ist erstens wünschenswert, weil nur dort das Polproblem auftrat, und zweitens auch leicht einzusehen, weil unsere zusätzliche Eichbedingung (3.30) nur die longitudinale Komponente des Eichfeldes betrifft. Das Polproblem ist damit tatsächlich behoben, und zwar nicht durch eine Polvorschrift, sondern durch Pol-Beseitigung. Für $k_0 \rightarrow 0$ geht der in Frage kommende Ausdruck in (3.34) gegen $(x_0 - t_0)(y_0 - t_0)$ und nicht mehr gegen unendlich. Schließlich wollen wir noch diesen regulären Propagator mit dem in [31] vorgeschlagenen Ausdruck (3.18) vergleichen. Dazu führen wir die k_0 -Integration in (3.34) explizit aus und erhalten für die longitudinale Komponente

$$-\frac{i}{2} (|x_0 - y_0| - |x_0 - t_0| - |t_0 - y_0|) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{y})} \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2}. \quad (3.36)$$

Offenbar unterscheiden sich die beiden Ausdrücke voneinander; Übereinstimmung ergibt sich allerdings für die Wahl $C = \mp 2t_0$, $t_0 \rightarrow \pm\infty$, wenn man einmal davon absieht, daß man sich so eine neue Divergenz einhandelt. Das wäre dann nicht weiter tragisch, wenn nicht nur der in [31] betrachtete Wilson-Loop, sondern alle eichinvarianten Größen von der Konstanten C unabhängig wären. Wie schon erwähnt, gibt es dafür bis jetzt keinen Beweis. Natürlich wurde auch mit dem Propagator (3.34) (und den zugehörigen Geistern, die sich aus (3.31) ergeben) der obligatorische Wilsonloop-Test durchgeführt [36], und auch hier konnte das kovariante Ergebnis reproduziert werden. Dies zeigt, daß das Polproblem nicht

durch den Pfadintegral-Formalismus entsteht, sondern schon einen Schritt früher durch die Wahl einer unvollständigen Eichfixierungsbedingung.

Wir merken uns also als Resultat unserer Betrachtungen zur temporalen Eichung: Nicht alle Eichbedingungen sind gleich gut, auch wenn das oft behauptet wird. Unvollständige Eichbedingungen verursachen Eichpole im Propagator. Diese sind durch zusätzliche Eichbedingungen behebbar.

Als nächstes betrachten wir die Coulomb-Eichung. Auch hier scheint eine Rest-eichfreiheit zu existieren. Beim Versuch, diese zu beheben, werden wir auf neue Schwierigkeiten stoßen, die uns dazu führen, neben den Auswirkungen von Eichfreiheitsgraden auf Propagatoren auch den Einfluß von Randbedingungen zu studieren.

3.4 Die Coulomb-Eichung

Die Eichbedingung hat hier die Form

$$\partial_i^x A^i(x) = 0. \quad (3.37)$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den abelschen Fall einer Eichtheorie, da hier bereits das Problem, um das es uns geht, sichtbar wird.

Bei nicht-abelschen Eichtheorien tritt zusätzlich das Phänomen auf, daß selbst die kovariante Eichbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ prinzipiell nicht in der Lage ist, die Eichfreiheiten vollständig zu fixieren. Das wird als Gribov-Problem bezeichnet [39]. Die Eichtransformationen, um die es dabei geht, sind sogenannte „große Eichtransformationen“. Sie sind nicht in der Form $V = \exp(-ig\Lambda_a t^a)$ darstellbar, reduzieren sich also bei verschwindender Kopplung nicht auf die Identität im Farbraum. Da wir uns in dieser Arbeit für die Feynman-Regeln für nicht-kovariante Eichungen interessieren, beschränken wir unsere Untersuchungen auf den störungstheoretisch zugänglichen Bereich, schließen also große Eichtransformationen explizit aus. Auch globale Eichtransformationen (mit Ausnahme der Identität natürlich) sind ausgeschlossen.

Wie in Anhang B dargestellt, hat die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes in Coulomb-Eichung die Form

$$\mathcal{L}_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_i^{\text{tr}}\partial^\mu A_{\text{tr}}^i - \frac{1}{2}\partial_i A_0\partial^i A^0. \quad (3.38)$$

Dabei ist A_{tr}^i die transversale Komponente des Vektorfeldes. Aus (3.38) läßt sich der Propagator für die Coulomb-Eichung scheinbar problemlos ablesen: Temporale und transversale Komponenten sind offenbar entkoppelt und breiten sich mit

$1/(k_i k^i)$ bzw. $1/(k_\mu k^\mu)$ aus, d.h.

$$\tilde{D}^{00}(k) = \frac{i}{\vec{k}^2}, \quad (3.39)$$

$$\tilde{D}^{ij}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\eta} \left(g^{ij} + \frac{k^i k^j}{\vec{k}^2} \right) \quad (3.40)$$

und

$$\tilde{D}^{0i}(k) = \tilde{D}^{i0}(k) = 0. \quad (3.41)$$

(3.38) ist aber invariant gegen rein zeitliche Eichtransformationen

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu^x \Lambda(x_0) = \begin{cases} A_0(x) - \dot{\Lambda}(x_0) & \text{für } \mu = 0 \\ A_i(x) & \text{für } \mu = i \end{cases}, \quad (3.42)$$

und tatsächlich sieht man das der temporalen Komponente des Propagators auch an: \tilde{D}_{00} hat einen Pol bei $\vec{k} = 0$. Trotzdem gibt es kein praktisches Beispiel (wie etwa Loop-Rechnungen im entsprechenden Fall der temporalen Eichung), bei dem dieser Pol Probleme bereiten würde. Wie wir noch sehen werden, haben wir ein Problem konstruiert, das gar nicht wirklich existiert. Nichtsdestoweniger ist die Klärung folgender Fragen interessant: Wohin führt die Beseitigung dieser scheinbaren Resteichfreiheit entsprechend dem im letzten Kapitel dargestellten Verfahren? Warum gibt es diese Resteichfreiheit nicht wirklich, die Resteichfreiheit der temporalen Eichung aber schon?

Gehen wir zunächst den eingeschlagenen Weg weiter. Um die Coulomb-Eichbedingung (3.37) zu ergänzen, fordern wir, daß die temporale Komponente des Vektorfeldes zusätzlich die Gleichung

$$A_0(x_0, \vec{r}_0) = 0 \quad (3.43)$$

erfüllt. Dabei ist \vec{r}_0 ein konstanter Ortsraum-Vektor. Offenbar ist das ganze Vorgehen dem Fall der temporalen Eichung sehr ähnlich. Ein Vergleich der zwei Paare von Eichbedingungen (3.11), (3.30) und (3.37), (3.43) zeigt, daß eigentliche und ergänzende Eichbedingung praktisch nur ausgetauscht wurden. (3.43) gilt natürlich hier nur auf einer eindimensionalen Hyperfläche, entsprechend der Tatsache, daß man es nur mit der eindimensionalen Menge der rein zeitlichen Eichtransformationen zu tun hat.

Bevor wir den zugehörigen Propagator ausrechnen, wollen wir sicherstellen, daß (3.37) und (3.43) auch wirklich gemeinsam realisiert werden können. Wir suchen also eine Eichtransformation Λ , die ein beliebiges, insbesondere beliebig geeichtes Vektorfeld V_μ so transformiert, daß

$$A_\mu = V_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad (3.44)$$

die beiden Eichbedingungen erfüllt. Offenbar führen die Gleichungen (3.37) und (3.43) auf Differentialgleichungen, aus denen Λ in Abhängigkeit von V_μ bestimmt werden kann. Das gewünschte Ergebnis liefert der Ansatz

$$\Lambda(x) = - \int d^3y [\Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) - \Delta_C(\vec{r}_0 - \vec{y})] \partial_i^y V^i(x_0, \vec{y}) + \int dy_0 \Theta(x_0 - y_0) V^0(y_0, \vec{r}_0) \quad (3.45)$$

mit der Greenschen Funktion

$$\Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{-1}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.46)$$

zum Operator $\vec{\nabla}_x^2$. Man überzeugt sich leicht, daß das transformierte Feld A_μ die beiden Eichbedingungen (3.37) und (3.43) erfüllt.

Unsere vollständig eichfixierte Lagrange-Dichte ergibt sich aus (3.38) durch Hinzunahme eines Eichfixierungsterms zu

$$\mathcal{L}_{\text{Coul,vollst}} = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_i^{\text{tr}} \partial^\mu A_i^{\text{tr}} - \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial^i A^0 + \frac{1}{2\alpha} A_0(x) A^0(x) \delta(\vec{x} - \vec{r}_0). \quad (3.47)$$

Offenbar bleiben die Raumkomponenten unverändert, sodaß beim Propagator nur D_{00} modifiziert werden wird. Der Beitrag D_{ij} ergibt sich weiterhin als Fourier-Transformierte von (3.40). Für die Zeit-Zeit-Komponente ergibt sich ganz analog zum Fall der temporalen Eichung (vgl. (3.34)) der Ausdruck

$$D_{00}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i e^{-ik_0(x_0 - y_0)} \frac{(e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0})(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{y}} - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0})}{\vec{k}^2}. \quad (3.48)$$

Der Pol bei $\vec{k} = 0$ ist somit tatsächlich beseitigt. Die Auswertung der k -Integrale ergibt aber den divergenten Ausdruck

$$D_{00}(x, y) = \delta(x_0 - y_0) \frac{i}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\gamma}|} - \frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{y}|} + \underbrace{\frac{1}{|\vec{\gamma} - \vec{\gamma}|}}_{\rightarrow \infty} \right). \quad (3.49)$$

Offenbar haben wir zwar das vermeintliche Infrarot-Problem, den Pol bei $\vec{k} = 0$, beseitigt, aber stattdessen haben wir uns eine Ultraviolett-Singularität eingehandelt.¹¹ Da es in der gewöhnlichen Coulomb-Eichung, d.h. ohne die Zusatzbedingung (3.43), gar kein Polproblem gibt (zumindest nicht bei praktischen Rechnungen), wir aber jetzt durch zusätzliche Eichfixierung ein UV-Problem produziert haben, liegt die Vermutung nahe, daß wir zuviel des Guten getan haben. Die bisher verfolgte Philosophie besagte, daß die Coulomb-Eichung unvollständig und durch eine zusätzliche Eichbedingung vollständig zu machen sei. Nun sieht es

¹¹Die Divergenz kommt von dem Integral $\int d^3k/k^2 = \int_0^\infty dk$.

eher so aus, als ob die Coulomb-Eichung vollständig ist und durch eine zusätzliche Eichbedingung sozusagen „überevullständig“ wird. Offenbar sieht man diesen Effekt aber erst beim Ermitteln des Eichfeld-Propagators und nicht schon auf dem Level der Eichfelder — im letzten Absatz wurde ja sichergestellt, daß man A_μ -Konfigurationen finden kann, die beide Eichbedingungen erfüllen. Wir haben es also mit einem Problem zu tun, das erst bei der Quantisierung zum Tragen kommt. Werfen wir deshalb noch einmal einen kritischen Blick auf unsere Quantisierungsvorschrift 3 auf Seite 30. Der freie Eichfeld-Propagator ergibt sich dort als Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.8). Um ihn eindeutig festzulegen, bedarf es aber neben der Differentialgleichung noch der Angabe geeigneter Randbedingungen. Diese ergeben sich im Prinzip aus den Randbedingungen der A_μ -Felder, über die im Pfadintegral integriert wird. Im allgemeinen wird diesen jedoch nur wenig Beachtung geschenkt, was sich an manchen Stellen offenbar rächt. Demgegenüber liefert der Formalismus der kanonischen Quantisierung bereits von sich aus gewisse Aussagen über das Randverhalten der Propagatoren. Im nächsten Abschnitt werden wir etwas allgemeiner auf das Verhältnis von Eich- und Randbedingungen eingehen, bevor wir in Abschnitt 3.6 das kanonische Quantisierungsschema vorstellen.

3.5 Das Wechselspiel zwischen Eich- und Randbedingungen

Oft hat man bei der Behandlung von Differentialgleichungen die physikalisch motivierte Randbedingung, daß die Lösungen im Unendlichen verschwinden sollen. Stellen wir diese Forderung an alle Komponenten der Eichfelder, dann ist die Coulomb-Eichbedingung tatsächlich vollständig, da z.B. rein zeitliche Eichtransformationen Λ die A_0 -Komponente so modifizieren würden, daß das transformierte Feld nicht mehr den Randbedingungen genüge; genauer:

$$A_0(x) - \partial_0^x \Lambda(x_0) \xrightarrow{\vec{x} \rightarrow \infty} -\partial_0^x \Lambda(x_0) \neq 0. \quad (3.50)$$

Es ergäbe sich eindeutig der Propagator (3.39). Solche Randbedingungen an die Eichfelder zu stellen würde somit das im letzten Abschnitt dargestellte Problem lösen. Die aus den beiden Eichbedingungen (3.37) und (3.43) konstruierte Eichung wäre überevullständig, weil es dann keine erlaubte, d.h. mit den Randbedingungen verträgliche, Eichtransformation gibt, die eine beliebige Eichfeld-Konfiguration in diese Eichung transformiert. Insofern wäre das eine durchaus wünschenswerte Einschränkung an die Eichfelder.

Leider hat die Sache aber einen Haken. Mit diesen Randbedingungen wäre nämlich auch die temporale Eichbedingung nicht mehr erfüllbar, sie wäre dann ebenfalls überevullständig [37]. Um das einzusehen, nehmen wir an, ein beliebiges Eichfeld ließe sich durch eine geeignete Eichtransformation so modifizieren, daß es die

temporale Eichbedingung erfüllt. Dann gilt für die elektrische Feldstärke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 F_{0i}(x_0, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 [\partial_0^x A_i(x_0, \vec{x}) - \underbrace{\partial_i^x A_0(x_0, \vec{x})}_{=0}] = A_i(x_0, \vec{x}) \Big|_{x_0=-\infty}^{x_0=\infty} = 0. \quad (3.51)$$

Da auf der linken Seite dieser Gleichung eine eichinvariante, also meßbare Größe steht, ist ihr Wert durch die physikalische Situation und nicht durch die Wahl der Eichung festgelegt. Es gibt keinen Grund, warum sie in jedem Fall verschwinden sollte. Auch die temporale Eichung ist daher übervollständig, wenn man fordert, daß alle Eichfeld-Komponenten im Unendlichen verschwinden sollen. Gleiches gilt übrigens auch für die radiale Eichung [40]. Nun gibt es zwar, wie oben dargelegt, durchaus Probleme mit der temporalen Eichung, aber sie grundsätzlich in Frage zu stellen, wäre doch etwas über das Ziel hinaus geschossen, zumal es keinen wirklichen, physikalisch motivierten Grund gibt, das Verschwinden des Eichfeldes im Unendlichen zu fordern, da man dieses ja gerade nicht messen kann.¹²

Trotzdem zeigen diese Überlegungen, daß sich Rand- und Eichbedingungen ergänzen. Strikte Randbedingungen reduzieren die erlaubten Eichfixierungen, führen also dazu, daß manche Eichbedingungen übervollständig sind, während „weiche“ Randbedingungen viele Eichtransformationen zulassen, sodaß diese u.U. gar nicht durch eine einzige Eichbedingung fixiert werden können. Eine weichere Randbedingung als das Verschwinden aller Eichfeld-Komponenten im Unendlichen läßt sich aber aus unserem störungstheoretischen Zugang gewinnen. Da wir uns nur für kleine Eichtransformationen $V = \exp(-ig\Lambda) \approx 1 - ig\Lambda$ interessieren, schließen wir alle Funktionen Λ aus, die im Unendlichen divergieren. Andernfalls gäbe es nämlich Punkte in der Raum-Zeit, an denen $\Lambda \gg 1/g$ gelten würde. Damit bleiben alle bisherigen Feststellungen gültig: Die temporale Eichung ist zulässig und zudem unvollständig, da die rein räumlichen Eichtransformationen erlaubt sind. Sie verschwinden zwar nicht für $x_0 \rightarrow \infty$, bleiben aber endlich. Zusammen mit der Eichbedingung (3.30) ist die temporale Eichung dann vollständig, da die Zusatzbedingung von allen rein räumlichen Eichtransformationen diejenigen fixiert, die im Unendlichen nicht divergieren.

Leider liefern diese weichen Randbedingungen keine neuen Aussagen über die Coulomb-Eichung, da auch rein zeitliche Eichtransformationen immer noch zugelassen sind.

¹²Anders verhält sich die Sache, wenn man eine Feldtheorie bei endlicher Temperatur T studiert [41]. Hier erzwingt der Formalismus, daß alle Felder in „Zeit“-Richtung periodischen Randbedingungen unterliegen — als „Zeit“ wird hier eine Euklidische Variable bezeichnet, die von 0 bis $1/T$ läuft. Aus dem eben dargestellten Grund ergibt sich dann, daß die temporale Eichung nicht bei endlicher Temperatur verwendbar ist — man muß in (3.51) nur $-\infty$ und ∞ durch 0 und $1/T$ ersetzen. Da die Kompaktifizierung aber nur die Zeitrichtung betrifft, sind andere axiale Eichungen, z.B. $A_3 = 0$, durchaus erlaubt.

3.6 Die kanonische Quantisierung von Eichfeldern

Bevor wir dieser Frage weiter nachgehen, soll der des öfteren erwähnte Formalismus der kanonischen Quantisierung für den Fall nicht-kovarianter Eichungen dargestellt werden. Das grundsätzliche Problem ist in jedem Lehrbuch (z.B. [11]) erwähnt: Die zu A_0 kanonisch konjugierte Variable verschwindet:

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0. \quad (3.52)$$

Der Grund ist natürlich in der Eichfreiheit der Theorie zu suchen. Die Zahl der dynamischen Freiheitsgrade der Eichfelder (2, z.B. links- und rechts-zirkular polarisierte Photonen bzw. Gluonen) ist kleiner als die Zahl der in der Lagrange-Dichte auftretenden Felder (4, $A_0 \dots A_3$). Eigentlich sollte es genügen, nur die dynamischen Felder zu quantisieren. Man verzichtet daher auf eine Quantisierung der temporalen Komponente A_0 und beseitigt die räumlich longitudinale Komponente durch die Wahl der Coulomb-Eichbedingung (3.37). Nur die beiden verbleibenden räumlich transversalen Felder werden quantisiert, und tatsächlich führt diese Prozedur [11] im Falle der Quantenelektrodynamik zum richtigen Ergebnis. Leider ist das bei nicht-abelschen Eichfeldern nicht der Fall. Die gleiche Vorgehensweise wie im QED-Fall [42] führt zu einer Theorie, die zur kovariant formulierten nicht äquivalent ist. Bei der (übrigens älteren) korrekten Behandlung der Coulomb-Eichung im kanonischen Formalismus [43] ergeben sich im Vergleich zum eben erwähnten Zugang [42] zusätzliche Multi-Gluon-Vertizes, die bei Zwei-Loop-Rechnungen zu Buche schlagen, d.h. ohne diese Beiträge ergeben sich z.B. falsche g^6 -Beiträge zu den Streuamplituden. Ursache dieses Fehlers ist die falsche Reihenfolge von Eichwahl und Quantisierung. Um bei verschiedenen Eichungen äquivalente Theorien zu erhalten, muß man zuerst quantisieren und dann die jeweilige Eichung wählen und nicht umgekehrt. Für den Fall der QCD ist die kanonische Quantisierung in der temporalen und der Coulomb-Eichung in [44] dargestellt. Dort wird die quantisierte Theorie von der temporalen in die Coulomb-Eichung transformiert. Die dazu benötigten Eichtransformationen sind operatorwertig, da sie von den Eichfeldern abhängen, und vertauschen deshalb nicht mit den kanonisch konjugierten Impulsen. Genauer gesagt geht es um die Nichtvertauschbarkeit der Impulse mit der Transformationsmatrix. Letztere ist gerade die Faddeev-Popov-Matrix. Die beim Vertauschen auftretenden Zusatzterme produzieren genau die oben erwähnten zusätzlichen Multi-Gluon-Vertizes. Offenbar kann man diese Zusatzterme nicht bekommen, wenn man vor dem Quantisieren umeicht, da in einer klassischen Theorie alle Größen miteinander kommutieren. Die Details dieses Operator-Ordnungsproblems sind in [44] für den Fall der QCD ausführlich dargestellt. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß die zusätzlichen Multi-Gluon-Terme in der Lagrange-Dichte zu bisher ungelösten Renormierungsproblemen führen [45], [46]; eine vollständige Formulierung der Störungstheorie in Coulomb-Eichung steht also noch aus (aktuell dazu [47]).

Quantisiert man die Coulomb-Eichung in der herkömmlichen Art und Weise [7] im Pfadintegral-Zugang, so fehlen die zusätzlichen Multi-Gluon-Terme [48], weil man — zumindest bei oberflächlicher Betrachtung — im Pfadintegral nichts von Operator-Ordnungsproblemen bemerkt. Tatsächlich tritt dieses Problem nicht nur bei Feldtheorien auf. Vielmehr wird man bereits in der Quantenmechanik damit konfrontiert, wenn man versucht, das Pfadintegral in krummlinigen Koordinaten so zu formulieren, daß die entstehende Theorie mit der kartesisch formulierten übereinstimmt. Auch hier hat man nämlich das Problem, daß die Jacobi-Determinante der Transformation von kartesischen in krummlinige Koordinaten nicht mit den Impulsoperatoren kommutiert. Trotzdem kann das Problem auch im Pfadintegral-Zugang befriedigend gelöst werden. Weiter darauf einzugehen würde etwas zu weit führen. Wir begnügen uns deshalb damit, auf die Fachliteratur zu verweisen [49], und beenden unsere Darstellung über Operator-Ordnungsprobleme mit der Feststellung, daß diese auch in der Quantenmechanik keineswegs nur von akademischem Interesse sind; z.B. ist bei der exakten Behandlung des Wasserstoff-Problems im Pfadintegral eine Koordinatentransformation in einen Raum mit Krümmung und Torsion notwendig [50].

Wie kann man aber nun überhaupt eine Eichtheorie quantisieren, ohne vorher eine Eichung zu wählen, d.h. wie geht man z.B. mit der Tatsache um, daß die zu A_0 kanonisch konjugierte Variable verschwindet? Auch das ist an sich schon lange bekannt [51]. Betrachten wir der Einfachheit halber den abelschen Fall, obwohl es hier, wie bereits erwähnt, keinen Unterschied macht, ob man zuerst quantisiert und dann eine Eichung wählt, oder umgekehrt. Trotzdem ist es natürlich nicht verkehrt — höchstens umständlicher —, das Ganze auch im abelschen Fall so herum durchzuführen, wie es im nicht-abelschen Fall einzig richtig ist.

Wir starten also mit der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes, das durch einen Ladungsstrom j (z.B. Elektronen) erzeugt wird:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + j_\mu A^\mu. \quad (3.53)$$

Dem hinzuzufügen wäre die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_D eines freien Dirac-Feldes. Da wir uns nur für die Quantisierung des A -Feldes interessieren, verzichten wir darauf, \mathcal{L}_D und j explizit anzugeben. Das Gleiche gilt für den Hamilton-Operator \hat{H}_D und die Quantisierungsvorschrift für die Materie-Felder, etc.

Die sich aus obiger Lagrange-Dichte ergebenden Bewegungsgleichungen sind hinlänglich bekannt (für die folgenden Überlegungen ist es nützlich, Zeit- und Raumkomponenten getrennt zu behandeln):

$$\partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) = -j^0, \quad (3.54)$$

$$\partial_0 (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) + \partial_j (\partial^i A^j - \partial^j A^i) = j^i. \quad (3.55)$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind gegeben durch

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (3.56)$$

und

$$\Pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i. \quad (3.57)$$

(3.57) kann man nun benutzen, um aus den Bewegungsgleichungen (3.54) und (3.55) Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit zu gewinnen. Π^i ist offenbar gerade die elektrische Feldstärke. Führt man zusätzlich die magnetische Feldstärke $\vec{B} := \text{rot} \vec{A}$ ein, so erhält man das Gaußsche und das Oerstedtsche Gesetz

$$\text{div} \vec{\Pi} = -j^0 \quad (3.58)$$

bzw.

$$\partial^0 \vec{\Pi} - \text{rot} \vec{B} = \vec{j}. \quad (3.59)$$

Wir haben es also mit dem Satz von Gleichungen (3.56-3.59) zu tun. Dabei sind aber nur (3.57) und (3.59) dynamische Bewegungsgleichungen, d.h. Gleichungen der Form „ $\partial^0 q = f(q)$ “, während das Verschwinden von Π^0 und das Gaußsche Gesetz Zwangsbedingungen (*constraints*) darstellen. Formal haben wir es also mit einem mechanischen System mit Zwangsbedingungen zu tun, und es ist deshalb nicht verwunderlich, daß schon lange bekannt ist, wie man so ein System quantisiert [51]. Die Tatsache, daß das mechanische System unendlich viele Freiheitsgrade hat (Feld), führt zu keinen weiteren Komplikationen. Wir gehen zunächst in gewohnter Weise vor, indem wir die Hamilton-Funktion $H = \int d^3x \mathcal{H}$ des Systems bestimmen und Vertauschungsrelationen zwischen den A -Feldern und ihren kanonisch konjugierten Impulsen postulieren. Für die Hamilton-Dichte ergibt sich

$$\mathcal{H} = \Pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}^2 + \vec{\Pi} \text{grad} A_0 + \frac{1}{2} \vec{B}^2 - j_0 A_0 + \vec{j} \vec{A}, \quad (3.60)$$

und wir fordern für alle Paare A - Π kanonische Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{\Pi}^\mu(t, \vec{x}), \hat{A}^\nu(t, \vec{y})] = -i g^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.61)$$

Der Hilbert-Raum dieser Theorie ist offenbar größer als der physikalische Raum. Für die physikalischen Zustände $|\Psi_{\text{phys}}\rangle$ fordern wir nun

$$\hat{\Pi}^0 |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0, \quad (3.62)$$

d.h. wir verlangen das Verschwinden von $\hat{\Pi}^0$ nicht als Operator-Identität auf dem ganzen Hilbert-Raum, sondern nur auf dem Unterraum der physikalischen Zustände. Da dieser *constraint* für alle Zeiten gelten soll, fordern wir zudem

$$\partial^0 \hat{\Pi}^0 |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0. \quad (3.63)$$

Unter Ausnutzung der Vertauschungsrelationen (3.61) erhalten wir

$$\partial^0 \hat{\Pi}^0 = i [\hat{H}, \hat{\Pi}^0] = \operatorname{div} \hat{\vec{\Pi}} + \hat{j}^0, \quad (3.64)$$

was mit (3.63) das Gaußsche Gesetz reproduziert und zwar ebenfalls „nur“ als Zwangsbedingung an die physikalischen Zustände:

$$(\operatorname{div} \hat{\vec{\Pi}} + \hat{j}^0) |\Psi_{\text{phys}}\rangle = 0. \quad (3.65)$$

Demgegenüber erhält man die dynamischen Bewegungsgleichungen (3.57) und (3.59) als Operatorgleichungen:¹³

$$\partial^0 \hat{\vec{A}} = i [\hat{H}, \hat{\vec{A}}] = -\hat{\vec{\Pi}} - \operatorname{grad} \hat{A}^0 \quad (3.66)$$

und

$$\partial^0 \hat{\vec{\Pi}} = i [\hat{H}, \hat{\vec{\Pi}}] = \operatorname{rot} \hat{\vec{B}} + \hat{\vec{j}}. \quad (3.67)$$

Wer sich an die entsprechenden Ausführungen in [11] (Kapitel 14) erinnert, mag spätestens jetzt stutzig werden. Sind die *constraints* (3.62) und (3.65) überhaupt kompatibel mit den Vertauschungsrelationen (3.61)? Folgende Rechnung scheint nahezu legen, daß das nicht der Fall ist:

$$-i\delta(\vec{x} - \vec{y}) = \langle \Psi_{\text{phys}} | [\hat{\Pi}^0(t, \vec{x}), \hat{A}^0(t, \vec{y})] | \Psi_{\text{phys}} \rangle \stackrel{(f)}{=} 0. \quad (3.68)$$

Dabei wurden normierte physikalische Zustände verwendet. Eine analoge Rechnung läßt sich auch für das Gaußsche Gesetz durchführen [52]. Im Gegensatz zu dieser — wie sich gleich herausstellen wird — falschen Argumentation, wird in [11] gezeigt, daß es nicht möglich ist, das Gaußsche Gesetz als Operatorgleichung zu erfüllen. Der Beweis läuft ganz analog wie hier nur ohne Bezug auf die Zustände und ist dann natürlich richtig. Der springende Punkt ist gerade, daß man die *constraints* nur auf die physikalischen Zustände bezieht.

Bevor wir die scheinbare Inkonsistenz auflösen, soll zur Illustration die gleiche Argumentationskette noch einmal auf ein einfaches quantenmechanisches Beispiel angewandt werden [53]: Betrachten wir einen Zwei-Teilchen-Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\vec{p}}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3.69)$$

und die Vertauschungsrelationen der Ortskoordinaten mit dem Gesamtimpuls $\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{p}}_2$:

$$[\hat{P}_i, \hat{r}_{j,A}] = -i\delta_{ij} \quad , \quad A = 1, 2. \quad (3.70)$$

¹³Zu beachten ist dabei wieder einmal eine Vorzeichen-Subtilität: $\operatorname{grad} = (\partial/\partial x^i) = (-\partial^i)$.

Für Zustände, die die beiden Teilchen in ihrem Ruhesystem beschreiben, gilt offenbar

$$\hat{\vec{P}}|\alpha\rangle = 0. \quad (3.71)$$

Analog zu (3.68) ergibt sich für normierte Zustände

$$-i\delta_{ij} = \langle\alpha|[\hat{P}_i, \hat{r}_{j,A}]|\alpha\rangle \stackrel{(f)}{=} 0. \quad (3.72)$$

Was läuft hier schief? Schieben wir vor des Rätsels Lösung noch ein Zitat aus [53] ein:

“There is a natural tendency among the great majority of physicists to disregard warnings voiced by the mathematically sophisticated minority and to treat operators and vectors in the Hilbert space as if they were finite-dimensional arrays subject to the rules of ordinary matrix algebra. While on the average these rules work well, from time to time unprepared researchers fall into a trap. After all, functional analysis is not equivalent to linear algebra.”

Im letzten Schritt von (3.72) haben wir nicht nur von (3.71) Gebrauch gemacht, sondern auch von

$$\langle\alpha|\hat{\vec{P}} \stackrel{(f)}{=} 0. \quad (3.73)$$

Diese Gleichung gilt aber nicht, da $\hat{\vec{P}}$ nicht hermitesch ist auf dem Unterraum der Zustände, die das Ruhesystem beschreiben. Offenbar sind nicht alle beliebigen Zwei-Teilchen-Zustände normierbar, da der Gesamtimpuls ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Zu festem Eigenwert von $\hat{\vec{P}}$ kann man aber normierte Zustände definieren, indem man sich in der Ortsdarstellung auf die Integrationen über die Relativkoordinaten beschränkt. Dann ist aber der Gesamtimpuls nicht hermitesch.

Um das zu veranschaulichen, betrachten wir die Ortsdarstellung von (3.72). Wir verwenden R_i für die Schwerpunkts- und r_i für die Relativkoordinaten. Der Operator des Gesamtimpulses ist in der Ortsdarstellung der Ableitungsoperator nach den Schwerpunktskoordinaten. Wegen (3.71) sind die Zustände $\langle\vec{R}, \vec{r}|\alpha\rangle$ nur von den Relativkoordinaten abhängig. (3.72) nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} -i\delta_{ij} &= \int d^3r \alpha^*(\vec{r}) \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial R_i} \left(R_j \pm \frac{r_j}{2} \right) \alpha(\vec{r}) \stackrel{(f)}{=} \\ &= \int d^3r \left(\frac{-1}{i} \frac{\partial}{\partial R_i} \alpha^*(\vec{r}) \right) \left(R_j \pm \frac{r_j}{2} \right) \alpha(\vec{r}) = 0. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ganz analog gilt für Eichtheorien, daß $\hat{\Pi}^0$ auf dem Unterraum der physikalischen Zustände nicht hermitesch ist. Im Schrödingerbild werden die \hat{A} -Felder zu zeitunabhängigen c -Zahlen und die Impulse zu funktionalen Ableitungen:

$$\hat{\Pi}^\mu = -i \frac{\delta}{\delta A_\mu}. \quad (3.75)$$

Die Zustände des Hilbert-Raumes sind dann Funktionale von A (und Funktionen in der Zeitvariablen t):¹⁴

$$\langle A^\mu | \Psi(t) \rangle = \Psi[A^\mu, t]. \quad (3.76)$$

Das erlaubt eine einfache Interpretation von (3.62): Die physikalischen Zustände sind unabhängig von A^0 :

$$\langle A^\mu | \Psi_{\text{phys}} \rangle = \Psi_{\text{phys}}[A^i]. \quad (3.77)$$

Daher muß man bei der Definition einer Norm für diese Zustände die Integration über A_0 ausschließen, weil diese einen unendlichen Beitrag liefern würde:

$$\langle \Psi_{\text{phys}} | \Psi_{\text{phys}} \rangle \neq \int \mathcal{D}A^\mu |\Psi_{\text{phys}}[A^i]|^2 = \int \mathcal{D}A^i |\Psi_{\text{phys}}[A^i]|^2 \underbrace{\int \mathcal{D}A^0}_{\rightarrow \infty}. \quad (3.78)$$

Aus dem Gaußschen Gesetz ergibt sich in analoger Weise die Forderung, daß auch die Integration über die räumlich longitudinale Komponente des A^i -Feldes ausgeschlossen werden muß [35], [54]. Kurz gesagt muß man sich bei der Definition von normierbaren physikalischen Zuständen auf die beiden physikalischen Freiheitsgrade des A -Feldes beschränken. Die durch die Hamilton-Dichte (3.60) und die beiden *constraints* (3.62), (3.65) definierte Theorie ist also durchaus in sich schlüssig.

3.7 Konsequenzen für die Coulomb-Eichung

Im folgenden werden wir nun aus den oben dargestellten *constraint*- und Bewegungsgleichungen den Hamilton-Formalismus für die temporale und für die Coulomb-Eichung ableiten. Da, wie eben dargelegt, die physikalischen Zustände von A^0 unabhängig sind, ist die temporale Eichung eine naheliegende Eichwahl, bei der nichts Aufregendes passiert. Zur besseren Unterscheidung ersetzen wir in den folgenden Ausführungen die Potentiale A^i durch V^i . Die physikalischen Zustände erfüllen in temporaler Eichung die Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{phys}}[\vec{V}, t] = \hat{H} \Psi_{\text{phys}}[\vec{V}, t] \quad (3.79)$$

mit

$$\hat{H} = \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \vec{V}(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \vec{V}(\vec{x})} + \frac{1}{2} \vec{B}^2[\vec{V}(\vec{x})] + \hat{j}(\vec{x}) \cdot \vec{V}(\vec{x}) \right) + \hat{H}_D \quad (3.80)$$

¹⁴Der Übersichtlichkeit halber unterdrücken wir die Abhängigkeit der Zustände von den Materiefeldern.

und unterliegen dem Gaußschen Gesetz

$$\left(i \operatorname{div} \frac{\delta}{\delta \vec{V}(\vec{x})} + \hat{j}^0(\vec{x}) \right) \Psi_{\text{phys}}[\vec{V}, t] = 0. \quad (3.81)$$

Wie steht es in dieser Sprache mit der Resteichfreiheit der temporalen Eichung? Tatsächlich ist die Schrödinger-Gleichung (3.80) invariant gegen räumliche Eichtransformationen [44], und der Gauß-Operator $\hat{\mathcal{G}} := i \operatorname{div} \delta / \delta \vec{V} + \hat{j}^0$ ist gerade der erzeugende Operator dieser Transformationen. Das Gaußsche Gesetz stellt somit sicher, daß die physikalischen Zustände die eichunabhängigen Zustände des Hilbert-Raumes sind. Die Resteichfreiheit der temporalen Eichung drückt sich also hier darin aus, daß man zusätzlich zur Bewegungsgleichung eine *constraint*-Gleichung zu erfüllen hat.

Man kann nun diese Resteichfreiheit dazu benutzen, um die Theorie von der temporalen in die Coulomb-Eichung zu transformieren [44]. Die drei Freiheitsgrade V^i werden ersetzt durch die beiden transversalen Komponenten A_{tr}^i und die Eichtransformation Λ :

$$V^i(\vec{x}) = A^i(\vec{x}) - \partial_x^i \Lambda(\vec{x}) \quad (3.82)$$

und

$$\partial_i^x A^i(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^i(\vec{x}) = A_{\text{tr}}^i(\vec{x}). \quad (3.83)$$

Die Materiefelder transformieren sich gemäß

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{ie\Lambda}. \quad (3.84)$$

Daraus ergibt sich:

$$\partial_i^x V^i(\vec{x}) = -\partial_i^x \partial_x^i \Lambda(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\vec{x}) = \int d^3y \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) \operatorname{div} \vec{V}(\vec{y}) \quad (3.85)$$

sowie

$$V_{\text{tr}}^i(\vec{x}) = A_{\text{tr}}^i(\vec{x}). \quad (3.86)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß wir im Schrödinger-Bild arbeiten und deshalb alle Felder zeitunabhängig sind. Daher ist $\partial_i^x \partial_x^i$ in (3.85) eindeutig invertierbar, wenn man sowohl konstante als auch im Unendlichen divergierende Lösungen für Λ ausschließt.¹⁵

Es läßt sich leicht zeigen, daß der magnetische Anteil im Hamilton-Operator (3.80) (im quantenmechanischen Bild die potentielle Energie) invariant ist gegenüber der Eichtransformation (3.82):

$$\vec{B}^2[\vec{V}(\vec{x})] = \vec{B}^2[\vec{A}(\vec{x})]. \quad (3.87)$$

¹⁵ Δ_C ist in (3.46) definiert.

Das Gleiche gilt natürlich für den Teil des Hamilton-Operators, der die Materiefelder enthält:

$$\int d^3x \hat{j}[\psi](\vec{x}) \vec{V}(\vec{x}) + \hat{H}_D[\psi] = \int d^3x \hat{j}[\psi'](\vec{x}) \vec{A}(\vec{x}) + \hat{H}_D[\psi']. \quad (3.88)$$

Um das Transformationsverhalten des elektrischen Anteils (kinetische Energie) sowie des Gaußschen Gesetzes zu studieren, betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta V^i(\vec{x})} &= \int d^3y \left(\frac{\delta A^j(\vec{y})}{\delta V^i(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta A^j(\vec{y})} + \frac{\delta \Lambda(\vec{y})}{\delta V^i(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{y})} \right) \\ &= \int d^3y \left(\frac{\delta V_{\text{tr}}^j(\vec{y})}{\delta V^i(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta A_{\text{tr}}^j(\vec{y})} + \int d^3y' \Delta_C(\vec{y} - \vec{y}') \partial_k^{y'} \frac{\delta V^k(\vec{y}')}{\delta V^i(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{y})} \right) \\ &= \int d^3y \left((Q_{\text{tr}})_i^j(\vec{y}, \vec{x}) \frac{\delta}{\delta A_{\text{tr}}^j(\vec{y})} + \partial_i^y \Delta_C(\vec{y} - \vec{x}) \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{y})} \right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

wobei wir den Projektor auf räumlich transversale Zustände

$$(Q_{\text{tr}})^{ij}(\vec{x}, \vec{y}) := \frac{\delta V_{\text{tr}}^i(\vec{x})}{\delta V_j(\vec{y})} = g^{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_x^i \partial_x^j \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.90)$$

eingeführt haben. Die funktionale Ableitung nach V^i wird also zerlegt in einen transversalen und einen longitudinalen Anteil. Letzterer enthält die Abhängigkeit von der Eichtransformation Λ . Da im transversalen Anteil ohnehin nur nach den transversalen Komponenten des A -Feldes differenziert wird, ist der Projektor redundant:

$$\int d^3y (Q_{\text{tr}})_i^j(\vec{y}, \vec{x}) \frac{\delta}{\delta A_{\text{tr}}^j(\vec{y})} = \frac{\delta}{\delta A_{\text{tr}}^i(\vec{x})}. \quad (3.91)$$

Der Operator der elektrischen (kinetischen) Energiedichte läßt sich nun schreiben als

$$-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \vec{V}(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \vec{V}(\vec{x})} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x})} + \frac{1}{2} \int d^3y \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{y})} \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{x})}. \quad (3.92)$$

Mischterme treten nicht auf, da transversaler und longitudinaler Anteil disjunkt sind:

$$\partial_x^i (Q_{\text{tr}})^{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 = (Q_{\text{tr}})^{ij}(\vec{x}, \vec{y}) \partial_j^y. \quad (3.93)$$

Das Gaußsche Gesetz vereinfacht sich zu

$$\left(-i \frac{\delta}{\delta \Lambda(\vec{x})} + j^0(\vec{x}) \right) \Psi_{\text{phys}}[\vec{A}_{\text{tr}}, \Lambda, t] = 0 \quad (3.94)$$

und kann daher aufgelöst werden:

$$\Psi_{\text{phys}}[\vec{A}_{\text{tr}}, \Lambda, t] = e^{-i \int d^3x j^0(\vec{x}) \Lambda(\vec{x})} \Phi[\vec{A}_{\text{tr}}, t]. \quad (3.95)$$

Hier ist die Eigenschaft des Gauß-Operators als Generator von Eichtransformationen explizit zu sehen. Einsetzen von (3.92) und (3.95) (sowie (3.87) und (3.88)) in (3.79) liefert

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi[\vec{A}_{\text{tr}}, t] = \hat{H}_{\text{Coul}}\Phi[\vec{A}_{\text{tr}}, t] \quad (3.96)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{Coul}} = \int d^3x \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x})} - \frac{1}{2} \int d^3y j^0(\vec{x}) \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) j^0(\vec{y}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \vec{B}^2[\vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x})] + \hat{j}(\vec{x}) \vec{A}_{\text{tr}}(\vec{x}) \right) + \hat{H}_D. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Per constructionem enthält dieser Hamilton-Operator weder räumlich longitudinale noch temporale Feldkomponenten. Insofern kann man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß wir immer noch in temporaler Eichung arbeiten. Tatsächlich haben wir ja nur die Resteichfreiheit der temporalen Eichung benutzt, um den Gauß-*constraint* zu lösen. Allerdings enthält der Hamilton-Operator nun einen nichtlokalen Anteil, der quadratisch in den Ladungsdichten ist. Der bilokale Operator $\Delta_C(\vec{x} - \vec{y})$ läßt sich nun ganz zwanglos als Propagator des temporalen Feldes A_0 interpretieren, genauer:

$$\langle A_0(x)A_0(y) \rangle = -i\Delta_C(\vec{x} - \vec{y})\delta(x_0 - y_0). \quad (3.98)$$

Etwas detaillierter läuft die Argumentation folgendermaßen: Aus der Schrödinger-Gleichung (3.96) kann man in gewohnter Weise die Pfadintegral-Darstellung des erzeugenden Funktionals der Greenschen Funktionen gewinnen:¹⁶

$$\begin{aligned} W[j] &= \int \mathcal{D}[A_{\text{tr}}^i, \Pi_{\text{tr}}^j] \exp \left[i \int dx_0 \left(\int d^3x \Pi_{\text{tr}}^i(x) \dot{A}_{\text{tr}}^i(x) - H_{\text{Coul}} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}A_{\text{tr}}^i \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_{\text{tr}}^i \partial^\mu A_{\text{tr}}^i + j_i(x) A_{\text{tr}}^i(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int d^3y j^0(x_0, \vec{x}) \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) j^0(x_0, \vec{y}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Um nun eine lokale Wirkung zu erhalten, muß man ein Hilfsfeld h einführen:

$$\begin{aligned} \exp \left[i \int d^4x \frac{1}{2} \int d^3y j^0(x_0, \vec{x}) \Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) j^0(x_0, \vec{y}) \right] \\ = \int \mathcal{D}h \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} h(x) \partial_i^x \partial_x^i h(x) + j_0(x) h(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Streng genommen gilt diese Gleichung nur bis auf einen Normierungsfaktor

$$\int \mathcal{D}h \exp \left[i \int d^4x \frac{1}{2} h(x) \partial_i^x \partial_x^i h(x) \right], \quad (3.101)$$

¹⁶Wir vernachlässigen die Dynamik der Materiefelder und betrachten j^μ als äußeren Strom.

den man aber durch Redefinition des Pfadintegralmaßes $\mathcal{D}h$ absorbieren kann. Insgesamt erhält man

$$W[j] = \int \mathcal{D}[A_{\text{tr}}^i, h] \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_{\text{tr}}^i \partial^\mu A_{\text{tr}}^i + \frac{1}{2} h(x) \partial_i^x \partial_x^i h(x) \right. \right. \\ \left. \left. + j_0(x) h(x) + j_i(x) A_{\text{tr}}^i(x) \right) \right]. \quad (3.102)$$

Ein Vergleich mit der Lagrange-Dichte in Coulomb-Eichung (3.38) zeigt nun, daß das Hilfsfeld h nichts anderes ist als A_0 . Der entscheidende Unterschied zum *ad hoc*-Pfadintegral-Zugang (3.7) besteht aber nun darin, daß wir über die Randbedingungen von h , also von A_0 , Bescheid wissen. Man muß sie eben so wählen, daß das Inverse von $\partial_i^x \partial_x^i$ gerade $-\Delta_C(\vec{x} - \vec{y}) \delta(x_0 - y_0)$ ist, denn das war der Startpunkt zur Einführung von h .

Die in Abschnitt 3.4 diskutierte Resteichfreiheit der Coulomb-Eichung bezüglich rein zeitlicher Transformationen tritt im hier dargestellten kanonischen Formalismus nicht auf, da im Schrödinger-Bild alle Operatoren zeitunabhängig sind. Das garantiert die eindeutige Invertierbarkeit von $\partial_i^x \partial_x^i$ in (3.85), was letztendlich den nichtlokalen Ausdruck in (3.97) liefert.

Wir beenden dieses Kapitel mit der Feststellung, daß sowohl die Untersuchung von Resteichfreiheiten als auch von Randbedingungen zur Bestimmung des richtigen Propagators nötig sind. Der Formalismus der kanonischen Quantisierung liefert dabei mehr Informationen als der Pfadintegral-Zugang.

*Der Zwölf-Elf kam auf sein Problem
und sprach: „Ich heiÙe unbequem.
Als hieÙ ich etwa Drei-Vier
statt Sieben — Gott verzeih mir!“
Und siehe da, der Zwölf-Elf nannt' sich
von jenem Tag ab Dreiundzwanzig.*

Christian Morgenstern, Das Problem

4 Die radiale Eichung

4.1 Vollständigkeit und Randbedingungen der radialen Eichung

Versuchen wir also, das im letzten Kapitel Gelernte auf den Fall der radialen Eichung anzuwenden. Wir werden im folgenden in einem D -dimensionalen Euklidischen Raum arbeiten, weil eine positiv definite Norm die Betrachtungen vereinfacht. Zur Unterscheidung von der für den Minkowski-Raum gebräuchlichen Notation verwenden wir hier nur tiefgestellte Lorentz-Indizes. Die Einsteinsche Summenkonvention gilt aber weiterhin.

Durch Wick-Rotation [7] lassen sich die Endergebnisse in den Minkowski-Raum zurücktransformieren. Auf dabei auftretende neue Probleme werden wir an entsprechender Stelle zurückkommen. Warum wir uns nicht gleich auf den physikalisch sinnvollen Fall $D = 4$ beschränken, wird bald klar werden.

Für die folgenden Überlegungen nützlich ist die Einführung des Betrags von x ,

$$|x| := \sqrt{x_\mu x_\mu}, \quad (4.1)$$

sowie des Einheitsvektors

$$\hat{x}_\mu := \frac{x_\mu}{|x|}. \quad (4.2)$$

Als erstes überprüfen wir die Vollständigkeit. Wir starten von einer beliebigen Eichfeld-Konfiguration B_μ und bestimmen alle Eichtransformationen

$$V = \exp(-ig\Lambda), \quad (4.3)$$

die B_μ in radial geeichte Felder A_μ überführen. Da wir uns „nur“ für störungstheoretische Ergebnisse interessieren, beschränken wir uns bei der Diskussion der Vollständigkeit auf den Fall freier Felder (vgl. Bemerkung zum Gribov-Problem in Abschnitt 3.4), d.h.

$$B_\mu \rightarrow A_\mu = V \left(B_\mu - \frac{1}{ig} \partial_\mu \right) V^{-1} \stackrel{g=0}{=} B_\mu - \partial_\mu \Lambda. \quad (4.4)$$

Wir suchen also die Lösungen $\Lambda[B](x)$ der inhomogenen partiellen Differentialgleichung

$$x_\mu (B_\mu(x) - \partial_\mu^x \Lambda[B](x)) = 0. \quad (4.5)$$

Wegen

$$x_\mu \partial_\mu^x = |x| \partial_{|x|} \quad (4.6)$$

ist durch (4.5) nur das Verhalten von Λ in radialer Richtung festgelegt. Die allgemeine Lösung von (4.5) ergibt sich folglich als Superposition einer Lösung der inhomogenen Gleichung, formal

$$\Lambda_{\text{inhom.}}[B](x) = \left(|x| \partial_{|x|}\right)^{-1} x_\mu B_\mu(x), \quad (4.7)$$

mit der Gesamtheit aller Lösungen

$$\Lambda_0(x) = f(\hat{x}) \quad (4.8)$$

der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$|x| \partial_{|x|} \Lambda_0(x) = 0. \quad (4.9)$$

Eine Greensche Funktion des Differentialoperators $|x| \partial_{|x|}$ ist gegeben durch

$$\Theta(|x| - |y|) \frac{1}{|y|^D} \delta(\hat{x} - \hat{y}) = \int_0^1 ds \frac{1}{s} \delta(sx - y), \quad (4.10)$$

und die allgemeine Lösung von (4.5) hat damit die Form

$$\Lambda[B](x) = \int_0^1 ds x_\mu B_\mu(sx) + f(\hat{x}). \quad (4.11)$$

Die radiale Eichbedingung scheint also unvollständig zu sein, da rein winkelabhängige Eichmoden nicht fixiert werden [38].

Betrachten wir aber einmal unseren eigentlichen Startpunkt, die Eichbedingung (2.70)

$$U[A](x, 0) = 1. \quad (4.12)$$

Aus der Transformationseigenschaft (2.64) der Paralleltransport-Operatoren ergibt sich für die Eichtransformationen $V[B]$ die Beziehung

$$V[B](x) U[B](x, 0) V^{-1}[B](0) = 1 \Rightarrow V[B](x) = V[B](0) U[B](0, x). \quad (4.13)$$

$V[B]$ und damit $\Lambda[B]$ sind daher bis auf eine globale Eichtransformation eindeutig durch (4.12) festgelegt. Das wäre bis jetzt noch kein Widerspruch, weil wir in Kapitel 2 zwar die radiale Eichbedingung (2.75) aus der Bedingung (2.70) abgeleitet

haben, nicht aber umgekehrt. Insofern wissen wir bis jetzt nur, daß die radiale Eichbedingung eine notwendige Voraussetzung dafür ist, daß (4.12) erfüllt ist. Betrachtet man allerdings die Definition der Paralleltransport-Operatoren (2.59), so scheint diese Voraussetzung auch hinreichend zu sein:

$$U[A](x, 0) = P \exp \left[ig \int ds x_\mu A_\mu(sx) \right] = P \exp \left[ig \int ds \underbrace{\frac{1}{s} sx_\mu A_\mu(sx)}_{=0} \right] = 1. \quad (4.14)$$

Jetzt ist der Widerspruch perfekt. Ist die radiale Eichung nun vollständig oder unvollständig? Offensichtlich muß das weitere Vorgehen stark von der Beantwortung dieser Frage geprägt sein, da, wie wir bei der temporalen Eichung gesehen haben, die Definition eines radialen Propagators von etwaigen zusätzlichen Eichfixierungen abhängt [38]. Im nicht-abelschen Fall kommt das Problem hinzu, ob es Faddeev-Popov-Geistfelder gibt, genauer: ob sie an die Eichfelder koppeln.

Aus gutem Grund haben wir uns im letzten Kapitel nicht nur mit Eich-, sondern auch mit Randbedingungen beschäftigt. Die oben dargestellte Unvollständigkeit beruht auf der Existenz der rein winkelabhängigen Eichtransformationen (4.8). Diese sind aber unstetig im Ursprung. Fordert man Stetigkeit der Eichtransformationen im ganzen Raum \mathbb{R}^D , insbesondere am Ursprung, so hat die homogene Differentialgleichung (4.9) keine Lösung. Setzt man nun $f = 0$ in (4.11), so ergibt sich eine eindeutige Eichtransformation

$$\Lambda[B](x) = \int_0^1 ds x_\mu B_\mu(sx), \quad (4.15)$$

die im Ursprung wohldefiniert ist — nämlich verschwindet —, wenn das Startfeld B_μ dort regulär ist. Läßt man die Forderung nach Stetigkeit fallen, so erhält man die ganze in (4.11) angegebene Lösungsmenge. Allerdings sind die sich daraus ergebenden radial geeichten Felder

$$A_\mu(x) = B_\mu(x) - \partial_\mu^x \int_0^1 ds x_\nu B_\nu(sx) - \partial_\mu^x f(\hat{x}) \quad (4.16)$$

wegen

$$\partial_\mu^x f(\hat{x}) \sim \frac{1}{|x|} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

am Ursprung divergent (falls B_μ dort regulär ist). Solche Feldkonfigurationen wurden aber bei der Ableitung [14] des Transformationsverhaltens (2.64) der Paralleltransport-Operatoren nicht berücksichtigt. Deshalb merkt man davon nichts bei dem „Beweis“ der Vollständigkeit der radialen Eichung gemäß (4.12-4.13).

Die Frage nach der Vollständigkeit der radialen Eichung reduziert sich auf die Frage, ob man unstetige Eichtransformationen berücksichtigen muß oder nicht. Zur

Klärung betrachten wir die Lagrange-Dichte des freien Eichfeldes. *Per definitionem* sind Eichtransformationen Abbildungen, die die Lagrange-Dichte invariant lassen. Insbesondere muß deshalb die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_p einer reinen Eichung verschwinden:

$$\mathcal{L}_p(x) = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu^x \partial_\nu^x \Lambda(x) - \partial_\nu^x \partial_\mu^x \Lambda(x) \right)^2 = 0. \quad (4.18)$$

Diese Bemerkung erscheint zunächst trivial, sie ist es aber in unserem Fall nicht: Bei rein winkelabhängigen Eichtransformationen $\Lambda(\hat{x})$ vertauschen die partiellen Ableitungen im Ursprung nicht, und deshalb ist

$$\mathcal{L}_p(x) \neq 0 \quad (4.19)$$

bei $x = 0$. Genau so werden magnetische Monopole konstruiert, und die kann man natürlich nicht wegeichen [55]. Die „Eichtransformationen“ $\Lambda(\hat{x})$ sind also eigentlich gar keine Eichtransformationen in \mathbb{R}^D , sondern nur in $\mathbb{R}^D \setminus \{0\}$. Wir interessieren uns aber für den vollen Raum, insbesondere interessieren wir uns gerade für den Ursprung, allgemein für den Referenzpunkt z , weil dieser am Ende aller Rechnungen mit der Schwerpunktkoordinate unserer Wigner-Funktion identifiziert werden soll. Daher muß man die rein winkelabhängigen Eichtransformationen ausschließen, und die radiale Eichbedingung ist somit vollständig.

Der logisch nächste Schritt ist die Berechnung des freien Propagators in radialer Eichung. Bevor wir im nächsten Abschnitt darauf eingehen, können wir uns noch kurz mit den Faddeev-Popov-Geistfeldern befassen. Auch das geht in der Formulierung (4.12) am elegantesten [56]. Dann ergibt sich nämlich eine sehr allgemeine Darstellung, die auch außerhalb des störungstheoretischen Bereiches gültig ist. Allgemein ist die Faddeev-Popov-Matrix für die Eichbedingung $F[A](x) = 0$ gegeben durch

$$M[A](x, y) = \left. \frac{\delta F[V A](x)}{\delta V(y)} \right|_{V=1}. \quad (4.20)$$

In unserem Fall ergibt sich somit

$$\begin{aligned} M_{\text{rad}}[A](x, y) &= \left. \frac{\delta(U[V A](x, 0) - 1)}{\delta V(y)} \right|_{V=1} = \left. \frac{\delta(V(x) U[A](x, 0) V(0))}{\delta V(y)} \right|_{V=1} \\ &= \left. \frac{\delta(V(x) V^{-1}(0))}{\delta V(y)} \right|_{V=1} = \delta(x - y) - \delta(0 - y). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Daran sieht man zweierlei: Zunächst das für uns erfreuliche Resultat, daß M unabhängig von den radial geeichten Feldern A ist, und außerdem, daß die Matrix immer noch Nullmoden besitzt, die durch die konstanten Eichtransformationen verursacht werden. Diese spielen aber für störungstheoretische Überlegungen keine Rolle. Trotzdem ist es natürlich interessant zu sehen, an welchen Stellen solche Sachen wieder auftauchen.

Da die Geistfelder von den Eichfeldern entkoppeln, brauchen wir sie nicht weiter zu berücksichtigen. Die radiale Eichung ist geistfrei. Damit ergeben sich im Prinzip ganz einfache Feynman-Regeln für die radiale Eichung: Die Gluonen wechselwirken mit sich selbst über die Drei- und Vier-Gluon-Vertizes (C.5) und (C.6) und ansonsten mit etwaigen Materiefeldern. Die Kopplung an letztere — z.B. über einen Fermion-Gluon-Vertex — ist aber ohnehin unabhängig von der gewählten Eichung. Andere Vertizes gibt es nicht, also fehlt uns „nur noch“ der Gluon-Propagator. Leider steckt wie so oft „der Teufel im Detail“, wie wir in Kürze sehen werden.

4.2 Der freie Propagator

Auch hier ist die Verwendung der Eigenschaften der Paralleltransport-Operatoren von Nutzen. Mit Hilfe der Differentiationsregel (2.62) läßt sich ein beliebiges Vektorpotential V_μ über die Ableitung eines Paralleltransport-Operators darstellen:

$$\lim_{x' \rightarrow x} \partial_\mu^x U[V](x, x') = ig V_\mu(x). \quad (4.22)$$

Übrigens verknüpft eine analoge Relation $U[V]$ und V in der Gitter-Eichtheorie [57], die vollständig über Paralleltransport-Operatoren von einem Gitterpunkt zu seinen Nachbarn beschrieben wird — dort werden diese meist als Link-Variablen bezeichnet: Der Differenzenquotient aus Link-Variablen liefert im Kontinuum-limites (Gitterabstand gegen Null) das Eichfeld.

Im Fall der radialen Eichung kann man daraus eine eichkovariante Darstellung des Vektorpotentials gewinnen:¹⁷

$$A_\mu(x) = \frac{1}{ig} \lim_{x' \rightarrow x} \partial_\mu^x [U[A](0, x) U[A](x, x') U[A](x', 0)], \quad (4.23)$$

da in dieser Eichung die eingeschobenen U -Operatoren identisch Eins sind. Indem man erneut (2.62) ausnutzt, kann man leicht zeigen, daß diese Darstellung äquivalent zur Feldstärkeformel (2.74) ist:¹⁸

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \frac{1}{ig} \lim_{x' \rightarrow x} \partial_\mu^x [U(0, x) U(x, x') U(x', 0)] \\ &= \frac{1}{ig} \lim_{x' \rightarrow x} \left[\left[\partial_\mu^x U(0, x) \right] U(x, x') U(x', 0) + U(0, x) \left[\partial_\mu^x U(x, x') \right] U(x', 0) \right] \\ &= \frac{1}{ig} \left[\partial_\mu^x U(0, x) \right] U(x, 0) + U(0, x) A_\mu(x) U(x, 0) \end{aligned}$$

¹⁷Im abelschen Fall ist die Darstellung sogar eichinvariant.

¹⁸Wir unterdrücken im folgenden die Abhängigkeit der Paralleltransport-Operatoren und der Feldstärke von den A -Feldern.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 ds \, s x_\nu U(0, sx) F_{\nu\mu}(sx) U(sx, 0) \\
&= \int_0^1 ds \, s x_\nu F_{\nu\mu}(sx). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Für Zwei-Punkt-Funktionen ergibt sich aus (4.23)

$$\begin{aligned}
&\langle A_\mu(x) \otimes A_\nu(y) \rangle \\
&= \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle U(0, x) U(x, x') U(x', 0) \otimes U(0, y) U(y, y') U(y', 0) \rangle. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall verschwindender Hintergrundfelder

$$\langle A_\mu \rangle = 0. \tag{4.26}$$

Das ist im Vakuum sicher richtig. Dagegen kann es z.B. für das Studium der Eigenschaften eines farbwechselwirkenden Plasmas durchaus nötig sein, einen nicht-verschwindenden Erwartungswert des Eichfeldes zu betrachten (vgl. dazu z.B. [27]). In diesem Abschnitt geht es uns aber letztendlich um die Bestimmung des freien radialen Propagators, um unsere Feynman-Regeln zu vervollständigen. In diesem Fall ist die Berücksichtigung von Hintergrundfeldern unnötig. Da es dann keine vor anderen ausgezeichnete Farbe gibt, hat der Propagator nur einen Singlett-Anteil im Farbraum:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle =: \delta^{ab} D_{\mu\nu}(x, y) \Rightarrow D_{\mu\nu}(x, y) = \frac{2}{N^2 - 1} \text{Sp} \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle, \tag{4.27}$$

und man erhält aus (4.25) eine eichinvariante Darstellung des radialen Propagators:

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle &= \delta^{ab} \frac{2}{N^2 - 1} \text{Sp} \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \delta^{ab} \frac{2}{N^2 - 1} \\
&\times \frac{1}{(ig)^2} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \text{Sp} \langle U(0, x) U(x, x') U(x', 0) U(0, y) U(y, y') U(y', 0) \rangle. \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Die Eichinvarianz des Ausdrucks auf der rechten Seite ergibt sich unmittelbar aus der Transformationseigenschaft (2.64) der Paralleltransport-Operatoren und aus der Zyklizität der Spur.

Hier sind ein paar klärende Worte vonnöten. Natürlich ist eine Zwei-Punkt-Funktion i.a. kein eichinvariantes Objekt. Das bedeutet aber ja nur, daß sich die Propagatoren in zwei unterschiedlichen Eichungen voneinander unterscheiden. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß ein eichinvariantes Objekt mit dem Propagator

in einer speziellen Eichung übereinstimmt. In jeder anderen Eichung unterscheidet sich das eichinvariante Objekt dann natürlich vom jeweiligen Propagator. Bei den meisten Eichungen ist es unmöglich, eine eichinvariante Darstellung des Propagators zu finden. Es ist gerade eine der Stärken der radialen Eichung, daß das klappt.

Auf die gleiche Weise, auf die in (4.24) aus der Darstellung über Paralleltransport-Operatoren die Feldstärkeformel abgeleitet wurde, kann man aus (4.25) eine alternative eichinvariante Darstellung des Propagators gewinnen:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle &= \delta^{ab} \frac{2}{N^2 - 1} \\ &\times \int_0^1 ds \int_0^1 dt s x_\alpha t y_\beta \text{Sp} \langle U(0, sx) F_{\alpha\mu}(sx) U(sx, 0) U(0, ty) F_{\beta\nu}(ty) U(ty, 0) \rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Diese Form kann nun benutzt werden, um den freien Eichfeld-Propagator in radialer Eichung zu berechnen. Da die rechte Seite der letzten Gleichung eichinvariant ist, kann man sie in beliebiger Eichung auswerten. Wir verwenden der Einfachheit halber die Feynman-Eichung mit ihrem freien Propagator (vgl. Anhang C)

$$\langle B_\mu^a(x) B_\nu^b(y) \rangle_{\text{Feyn}} = \delta^{ab} D_{\mu\nu}^F(x, y) = -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} [(x - y)^2]^{1-D/2}. \quad (4.30)$$

Mit den bei verschwindender Kopplung gültigen Relationen $U(a, b) = 1$ und $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ erhält man aus (4.29) das erstaunliche (und frustrierende) Ergebnis, daß der freie radiale Propagator im vierdimensionalen Raum divergent ist [21]:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 &= \\ &= -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \int_0^1 ds \int_0^1 dt s x_\alpha t y_\beta \\ &\quad \times \left(\delta_{\mu\nu} \partial_\alpha^{sx} \partial_\beta^{ty} + \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu^{sx} \partial_\nu^{ty} - \delta_{\alpha\nu} \partial_\mu^{sx} \partial_\beta^{ty} - \delta_{\mu\beta} \partial_\alpha^{sx} \partial_\nu^{ty} \right) [(sx - ty)^2]^{1-D/2} \\ &= -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} [(x - y)^2]^{1-D/2} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\mu^x \int_0^1 ds x_\nu [(sx - y)^2]^{1-D/2} - \partial_\nu^y \int_0^1 dt y_\mu [(x - ty)^2]^{1-D/2} \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu^x \partial_\nu^y \underbrace{\int_0^1 ds \int_0^1 dt x \cdot y [(sx - ty)^2]^{1-D/2}}_{\sim \frac{1}{4-D}} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Details dieser Rechnung sind in Anhang D dargestellt. Es sei darauf hingewiesen, daß es sich hier nicht um eine Singularität in dem Sinn handelt, daß der Propagator für bestimmte Werte von x bzw. y divergiert, das wäre auch nicht weiter schlimm; vielmehr divergiert er für beliebige Werte von x und y — mit einer Ausnahme: Fällt eines der Argumente mit dem Ursprung zusammen, verschwindet der Propagator. Das wird durch die Randbedingung erzwungen. Ebenso gilt *per constructionem* auch für den Propagator die Eichbedingung

$$x_\mu \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 = 0 = \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 y_\nu . \quad (4.32)$$

Natürlich sind wir nicht die ersten, die versucht haben, den radialen Propagator aus der Feldstärkeformel abzuleiten, und so das divergente Resultat (4.31) produziert haben [21], [58]. Die Erklärung für dieses Phänomen stand allerdings bis jetzt aus.

Trotz umsichtiger Behandlung von etwaigen Unvollständigkeiten der radialen Eichbedingung sowie angemessener Randbedingungen sind wir wieder mit einem singulären Verhalten des Propagators konfrontiert. Woher kommt diese Divergenz? Drei mögliche Antworten bieten sich an:

1. Die oben diskutierte Randbedingung, die Stetigkeit am Ursprung, ist unangemessen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer zusätzlichen Eichbedingung; bzw. umgekehrt: Ohne zusätzliche Eichbedingung zeigt der Propagator pathologisches Verhalten — ähnlich wie im Fall der temporalen Eichung.
2. Die radiale Eichung ist (zumindest zusammen mit der Randbedingung am Ursprung) übervollständig — ähnlich der „vollständigen“ Coulomb-Eichung aus Abschnitt 3.4.
3. (Klar, wenn nicht 1. oder 2., dann:) Es gibt einen anderen Grund.

Zu 1. Dieser Weg wurde in [38] eingeschlagen. Tatsächlich erhält man durch zusätzliche Eichfixierung der rein winkelabhängigen Eichtransformationen einen Ausdruck für den freien Propagator, der fast überall regulär ist. Am Ursprung ist dieser Propagator aber nicht wohldefiniert. Insofern „lebt“ dieses Objekt nur in $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Das fügt sich ganz zwanglos in unser oben skizziertes Bild: In diesem Raum „mit Loch“ ist die radiale Eichung unvollständig. Ohne zusätzliche Eichfixierung kann das für den Propagator zu Pathologien führen. Allerdings haben wir es hier mit einer etwas anderen „Krankheit“ als im Fall der temporalen Eichung zu tun. Dort verursacht die Unvollständigkeit der Eichfixierung einen unphysikalischen Pol in der Impulsraum-Darstellung des Propagators — ein Infrarot-Problem also. Hier dagegen entsteht die Divergenz dadurch, daß der effektive Abstand

$sx - ty$ der beiden Argumente beliebig klein werden kann. Wir haben es deshalb mit einem Ultraviolett-Problem zu tun (vgl. auch Anhang D). Dieses „Krankheitsbild“ erinnert eher an unser Problem mit der „vollständigen“ Coulomb-Eichung (3.48, 3.49). Dann wäre unsere Diagnose aber nicht Unvollständigkeit, sondern Übervollständigkeit (siehe 2.). In jedem Fall bleibt unser bereits geäußelter Einwand, daß der auszuschließende Punkt (hier der Ursprung) letztendlich der Schwerpunkt unserer Wigner-Funktion ist und daher gerade nicht aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden sollte.

Zu 2. Wie eben erwähnt, scheint die Ultraviolett-Divergenz auf Übervollständigkeit hinzudeuten. Das wäre natürlich das vorzeitige Aus für alle Anwendungen der radialen Eichung, zumindest in ihrer quantisierten Version. Die Unvollständigkeit einer Eichung kann man durch zusätzliche Eichbedingungen beheben. Um Übervollständigkeit zu reparieren, müßte man die Eichbedingung „aufweichen“. Bei der radialen Eichung gehen dadurch aber all die schönen Eigenschaften, insbesondere (2.70) verloren, die uns bewegen haben, diese Eichung zu wählen. Im Falle der Coulomb-Eichung konnten wir das Problem im kanonischen Formalismus klären. Ein völlig analoges Vorgehen ist uns allerdings verwehrt, weil man in der in Abschnitt 3.7 dargestellten Art die temporale Eichung (unter Ausnutzung ihrer Resteichfreiheit) nur in Eichungen überführen kann, die lediglich die Raumkomponenten des Vektorpotentials einbeziehen, also außer der bereits behandelten Coulomb-Eichung z.B. axiale Eichungen (wie etwa $A_3 = 0$) [59] oder die Poincaré-Eichung $x_i A_i = 0$ [60]. Letztere ist aber wegen ihrer nahen Verwandtschaft zur radialen Eichung durchaus von Nutzen: Ganz analog gibt es auch hier eine Feldstärkeformel

$$A_i(x_0, \vec{x}) = \int_0^1 ds s x_j F_{ji}(x_0, s\vec{x}), \quad (4.33)$$

und man kann daraus den Raum-Raum-Anteil des freien Propagators in Poincaré-Eichung bestimmen:¹⁹

$$\begin{aligned} \langle A_i^a(x_0, \vec{x}) A_j^b(y_0, \vec{y}) \rangle_0^{\text{Poincaré}} &= \\ &= -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \left(\delta_{ij} [(x_0 - y_0)^2 + (\vec{x} - \vec{y})^2]^{1-D/2} \right. \\ &\quad \left. - \partial_i^x \int_0^1 ds x_j [(x_0 - y_0)^2 + (s\vec{x} - \vec{y})^2]^{1-D/2} \right) \end{aligned}$$

¹⁹Die Bestimmung des temporalen Anteils ist etwas aufwendiger. Anders als bei der Coulomb-Eichung gibt es zudem auch raum-zeit-gemischte Komponenten D_{i0} .

$$\begin{aligned}
& - \partial_j^y \int_0^1 dt y_i [(x_0 - y_0)^2 + (\vec{x} - t\vec{y})^2]^{1-D/2} \\
& + \partial_i^x \partial_j^y \int_0^1 ds \int_0^1 dt \vec{x}\vec{y} [(x_0 - y_0)^2 + (s\vec{x} - t\vec{y})^2]^{1-D/2} . \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Der kanonische Formalismus liefert (nach langer Rechnung, die wir hier nicht darstellen) das gleiche Ergebnis. Dieser Propagator ist an den meisten Stellen regulär, da der $(x_0 - y_0)^2$ -Term gewissermaßen einen *UV-cuttoff* darstellt. Für $x_0 = y_0$ erhalten wir aber für beliebige Werte von \vec{x} und \vec{y} wieder das singuläre Verhalten, das wir vom radialen Propagator kennen. Wir werten das als einen ersten Hinweis, daß die Ursache der uns plagenden Divergenz nicht in einer Übervollständigkeit der radialen Eichung begründet liegt, sondern an anderer Stelle gesucht werden muß. Das ist natürlich weit entfernt von einem Beweis. Wie wir aber im folgenden sehen werden, gibt es einen wesentlich „natürlicheren“ Grund für das singuläre Verhalten des radialen Propagators.

NB: Für Formulierungen der Transport-Theorie im *equal time*-Formalismus [24] übernimmt die Poincaré-Eichung gerade die Bedeutung, die die radiale Eichung für die Lorentz-kovariante Formulierung hat — die auftretenden Paralleltransport-Operatoren reduzieren sich auf die Identität. Man wertet aber dann alle Zwei-Punkt-Funktionen, z.B. obigen Propagator (4.34), an der Stelle $x_0 = y_0$ aus (*equal time*), und schon hat man wieder das gleiche Problem.

Für die Erklärung des singulären Verhaltens des radialen Propagators kommt nun der bis jetzt sehr umständlich erscheinenden Darstellung (4.28) zentrale Bedeutung zu. Der Erwartungswert auf der rechten Seite ist (bis auf die Normierung) ein spezielles Beispiel für einen Wilson-Loop:

$$W_1(x, x', y, y') := \frac{1}{N} \text{Sp} \langle U(0, x) U(x, x') U(x', 0) U(0, y) U(y, y') U(y', 0) \rangle . \quad (4.35)$$

Und zwar gehört er zu einer Klasse von Wilson-Loops, die — nicht durch irgendwelche Berechnungen in einer „kranken“ Eichung, sondern ganz natürlich und zwangsläufig — genau solche Divergenzen besitzen, wie wir sie vor uns haben [61]. Daher schieben wir einen Abschnitt über Definition und Renormierungseigenschaften von Wilson-Loops ein. Zuvor fügen wir aber noch (4.28) und (4.35) zusammen und erhalten die etwas handlichere Formel

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \frac{1}{(ig)^2} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y W_1(x, x', y, y') . \quad (4.36)$$

4.3 Wilson-Loops und Renormierung

Zunächst die bereits in Abschnitt 3.1 versprochene Definition: Für eine beliebige geschlossene Kontur C im D -dimensionalen Raum ist der zugehörige Wilson-Loop gegeben durch

$$W(C) = \frac{1}{N} \text{Sp} \left\langle P \exp \left[ig \oint_C dx_\mu B_\mu(x) \right] \right\rangle. \quad (4.37)$$

Unter Ausnutzung der Transformationseigenschaft (2.64) von Paralleltransport-Operatoren und der Zyklizität der Spur läßt sich leicht zeigen, daß die so konstruierten Objekte, unabhängig von der Wahl der Kontur, eichinvariant sind.

Für störungstheoretische Anwendungen interessant ist seine Entwicklung in Ordnungen der Kopplungskonstanten g :

$$W(C) = 1 + \frac{1}{N} \sum_{n=2}^{\infty} (ig)^n \oint_C dx_{\mu_1}^1 \dots \oint_C dx_{\mu_n}^n \times \Theta_C(x^1 > \dots > x^n) \text{Sp} G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x^1, \dots, x^n). \quad (4.38)$$

Dabei ordnet $\Theta_C(x^1 > \dots > x^n)$ die Punkte x^1, \dots, x^n entlang der Kontur C , und

$$G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x^1, \dots, x^n) := \langle B_{\mu_1}(x^1) \dots B_{\mu_n}(x^n) \rangle \quad (4.39)$$

sind die Greenschen Funktionen.

Wie alle störungstheoretisch ermittelten Größen (z.B. Selbstenergien, Vertexfunktionen) so besitzen auch Wilson-Loops Ultraviolett-Singularitäten in fast jeder Ordnung der Kopplungskonstanten. Man kann zeigen [62], daß diese Singularitäten durch die übliche Ladungs- und Wellenfunktionsrenormierung beseitigt werden können — wenn die Kontur glatt (d.h. differenzierbar) und einfach (d.h. ohne Kreuzungspunkte) ist. Man könnte nun meinen, daß das die praktisch relevante Klasse von Wilson-Loops ist. Tatsächlich sind es aber gerade die anderen, also die Wilson-Loops mit Knicken und/oder Kreuzungspunkten, die Informationen über die nicht-abelsche Dynamik eines Systems tragen, während man aus den glatten, einfachen Loops im Vergleich zum abelschen Fall praktisch nichts Neues gewinnt (vgl. [63] und dort angegebene Referenzen).

Zurück zu unserem eigentlichen Problem. Ein Blick auf den uns interessierenden Wilson-Loop (4.35) zeigt, daß wir es hier mit Knicken und Kreuzungspunkten zu tun haben (vgl. Abb. 2).

Wie steht es nun mit den Singularitäten und Renormierungseigenschaften dieser Klasse von Wilson-Loops? Während bei glatter, einfacher Kontur die ersten Singularitäten in Ordnung g^4 auftreten, verursacht jeder Knick und jeder Kreuzungspunkt eine Ultraviolett-Divergenz ab Ordnung g^2 . Diese sogenannten *cusps*-Singularitäten sind ebenfalls störungstheoretisch renormierbar [63], [64].

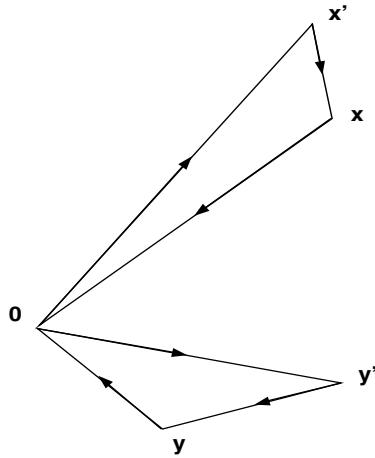


Abbildung 2: Der Wilson-Loop W_1 , der gemäß (4.36) eng mit dem radialen Propagator verknüpft ist.

Die Renormierungsfaktoren sind dabei von den in der Kontur auftretenden Winkeln abhängig. Explizit wurde das Renormierungsprogramm bisher einschließlich bis zur Ordnung g^4 durchgeführt [65], [66]. Anschaulich lassen sich die *cusp*-Divergenzen folgendermaßen verstehen: Einen Wilson-Loop kann man auffassen als eindimensionale Fermionfelder, die auf der Kontur leben und Gluonen austauschen [67]. Wie gewöhnliche (Farb-)Ladungen emittieren auch diese eindimensionalen Fermionen Bremsstrahlungsgluonen, an den Stellen, an denen die Kontur nicht gerade verläuft. Bei einem Knick wird die Menge an emittierter Bremsstrahlung unendlich groß — die *cusp*-Divergenz.

Die Tatsache, daß der Wilson-Loop (4.35) bereits ab Ordnung g^2 divergent ist, hat eine unmittelbare Konsequenz für den radialen Propagator: Bedingt durch den Faktor $1/g^2$ in seiner Darstellung (4.36) muß er ab Ordnung g^0 , also bereits im freien Fall, singular werden, und genau das passiert ja auch. Das legt folgende Interpretation nahe:

Der radiale Propagator ist nicht deshalb divergent, weil diese Eichung besonders unphysikalisch wäre — etwa in dem Sinn, daß sie die Eichfreiheit übervollständig einschränkt —, sondern die Singularität tritt gerade deshalb auf, weil die radiale Eichung „sehr physikalisch“ ist — in dem Sinne, daß der Propagator eng mit physikalischen (eichinvarianten) Größen verknüpft ist, die aber ihrerseits renormierungsbedürftig sind.

Voraussetzung dieser ganzen Interpretation ist natürlich, daß es sich bei der Singularität des freien radialen Propagators tatsächlich um eine *cusp*-Divergenz handelt. Der Beweis dafür wird in Anhang E nachgereicht. Dort wird zudem ganz analog zur Renormierung von Wilson-Loops auch der freie radiale Propagator

renormiert. Man erhält das Objekt

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_R^0 &= \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} \left(\delta^{ab} \mu^{D-4} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot \gamma_{xy} \right) + \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Welcher ist nun der „richtige“ Propagator, der dimensional regularisierte, also für $D \rightarrow 4$ divergente (4.31), oder der renormierte (4.40)? Rein intuitiv würde man natürlich auf letzteren tippen. Untersuchen wir also seine Eigenschaften. Tatsächlich erfüllt auch er die radiale Eichbedingung

$$x_\mu \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_R^0 = 0 \quad (4.41)$$

und ist, wie es sich für Zwei-Punkt-Funktionen gehört, symmetrisch unter Austausch aller Indizes und Variablen. Allerdings ist er am Ursprung nicht wohldefiniert — im Gegensatz zum an allen anderen Stellen divergenten Ausdruck (4.31) (vgl. dazu die Bemerkungen nach (4.31)). Da wir bis jetzt immer großen Wert auf das Randverhalten am Ursprung gelegt haben, wollen wir es auch weiterhin so halten. Wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, ist das singuläre Verhalten von (4.31) kein Unfall, sondern notwendig, um bei Loop-Rechnungen für eichinvariante Größen das richtige Ergebnis zu liefern.

Als nächstes werden wir demonstrieren, daß man mit dem nur dimensionsregularisierten wohldefinierten radialen Propagator (4.31) tatsächlich (und trotz seiner Divergenz für $D = 4$) rechnen kann und daß damit berechnete eichinvariante Größen mit den in Feynman-Eichung ermittelten übereinstimmen.

4.4 Eichinvariante Größen in radialer Eichung

4.4.1 Ein spezieller Wilson-Loop

Wir starten mit einem mit Bedacht ausgewählten Wilson-Loop, Abb. 3, den wir bis Ordnung g^2 berechnen wollen. Dazu ein paar Vorbemerkungen. Das direkte Einsetzen des Propagators in den g^2 -Anteil von (4.38) bringt keine Informationen, und zwar aus folgendem Grund: Betrachten wir zunächst einen völlig beliebigen freien Propagator

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x, y) := \delta^{ab} D_{\mu\nu}(x, y) := \delta^{ab} \left(D_{\mu\nu}^F(x, y) - \partial_\mu^x \Delta_\nu(x, y) - \partial_\nu^y \Delta_\mu(y, x) \right), \quad (4.42)$$

d.h. mit beliebigem Δ_μ , und eine beliebige Kontur in (4.38), parametrisiert durch $u(\sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$, $u(0) = u(1)$. Der Beitrag zur Summe in (4.38) in niedrigster nichttrivialer Ordnung ist gegeben durch

$$(ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \dot{u}_\mu(\sigma) \dot{u}_\nu(\tau) \Theta(\sigma - \tau) D_{\mu\nu}(u(\sigma), u(\tau))$$

$$\begin{aligned}
&= (ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \dot{u}_\mu(\sigma) \dot{u}_\nu(\tau) D_{\mu\nu}(u(\sigma), u(\tau)) \\
&= (ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \dot{u}_\mu(\sigma) \dot{u}_\nu(\tau) \\
&\quad \times \left(D_{\mu\nu}^F(u(\sigma), u(\tau)) - \partial_\mu^{u(\sigma)} \Delta_\nu(u(\sigma), u(\tau)) - \partial_\nu^{u(\tau)} \Delta_\mu(u(\tau), u(\sigma)) \right). \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Die Θ -Funktion konnte man wegen der Symmetrie-Eigenschaft des Propagators durch $1/2$ ersetzen. Nun verwenden wir

$$\dot{u}_\mu(\sigma) \partial_\mu^{u(\sigma)} = \frac{d}{d\sigma}, \quad (4.44)$$

was dazu führt, daß alle Δ -abhängigen Terme in (4.43) verschwinden, weil sich die entstehenden Oberflächenterme wegen der Geschlossenheit der Kontur gegeneinander wegheben. Man erhält also auf diese Art in Ordnung g^2 keine Information, ob zwei verschiedene Eichungen, besser gesagt: zwei unterschiedliche Sätze von Feynman-Regeln, das gleiche Ergebnis für Wilson-Loops liefern. Deshalb sind die interessanten Wilson-Loop-Tests in Ordnung g^4 , wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt.

Die Sache sieht aber anders aus, wenn man statt dem direkten Einsetzen zuerst einen Teil des Loops durch Ausnutzen der Eichbedingung beseitigt. Dann hat man effektiv keine geschlossene Kontur mehr, und das Ganze ist nicht mehr trivial. Das motiviert die Wahl des zu betrachtenden Wilson-Loops, Abb. 3, mit der Kontur

$$\ell : u(\sigma) = \begin{cases} \sigma x & , \sigma \in [0, 1] & , x \in \mathbb{R}^D \\ w(\sigma - 1) & , \sigma \in [1, 2] & , w(0) = x, w(1) = y \\ (3 - \sigma) y & , \sigma \in [2, 3] & , y \in \mathbb{R}^D \end{cases}. \quad (4.45)$$

Der Weg $w(\sigma - 1)$ ist dabei eine beliebige Verbindung von x und y .

Zuerst berechnen wir das Ganze in Feynman-Eichung:

$$\begin{aligned}
W(\ell) &= \frac{1}{N} \text{Sp} \left\langle \mathcal{P} \exp \left[ig \oint_\ell du^\mu V_\mu(u) \right] \right\rangle \\
&\approx 1 + (ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \int_0^3 d\sigma \int_0^3 d\tau \Theta(\sigma - \tau) \dot{u}^\mu(\sigma) \dot{u}^\nu(\tau) D_{\mu\nu}^F(u(\sigma), u(\tau)) \\
&= 1 + (ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^3 d\sigma \int_0^3 d\tau \dot{u}^\mu(\sigma) \dot{u}^\nu(\tau) D_{\mu\nu}^F(u(\sigma), u(\tau))}_{=: I_f}. \quad (4.46)
\end{aligned}$$

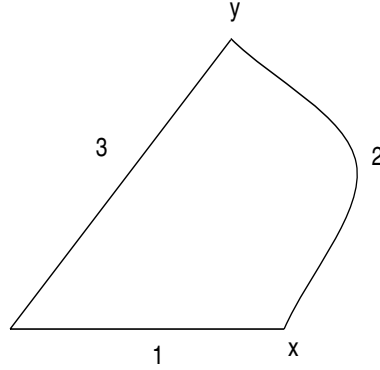


Abbildung 3: Ein Wilson-Loop mit zwei geraden Teilstücken.

Zur Berechnung von I_f zerlegen wir die Kontur ℓ gemäß (4.45) in ihre drei Teile und stellen fest, daß in (4.46) jeder Teil mit sich und mit allen anderen Teilen der Kontur jeweils durch einen Feynman-Propagator verbunden wird. Für I_f ergibt sich also folgende Zerlegung:

$$I_f = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 (A, B), \quad (4.47)$$

wobei (A, B) für die Verbindung der Teile A und B der Kontur steht (vgl. Abb. 3), also z.B.

$$\begin{aligned} (1, 2) &= \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau x^\mu \dot{w}^\nu(\tau) D_{\mu\nu}^F(\sigma x, w(\tau)) \\ &= -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau x^\mu \dot{w}_\mu(\tau) [(\sigma x - w(\tau))^2]^{1-D/2}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Nun berechnen wir den gleichen Wilson-Loop in radialer Eichung mit unserem Propagator (4.31). Wegen der Eichbedingung tragen der erste und der dritte Teil der Kontur nicht zum Ergebnis bei. Wir erhalten

$$\begin{aligned} W(\ell) &= \frac{1}{N} \text{Sp} \left\langle \mathcal{P} \exp \left[ig \int_0^1 d\sigma \dot{w}_\mu(\sigma) A^\mu(w(\sigma)) \right] \right\rangle \\ &\approx 1 + (ig)^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \dot{w}^\mu(\sigma) \dot{w}^\nu(\tau) D_{\mu\nu}^0(w(\sigma), w(\tau))}_{=: I_r}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Erneut machen wir von

$$\dot{w}_\mu(\sigma) \partial_{w(\sigma)}^\mu = \frac{d}{d\sigma} \quad (4.50)$$

Gebrauch und enden mit dem etwas unübersichtlichen Ausdruck

$$\begin{aligned}
I_r = & -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \left[\int_0^1 d\sigma \int_0^1 d\tau \dot{w}_\mu(\sigma) \dot{w}^\mu(\tau) [(w(\sigma) - w(\tau))^2]^{1-D/2} \right. \\
& + \int_0^1 ds \int_0^1 dt \left(w_\mu(1) w^\mu(1) [(sw(1) - tw(1))^2]^{1-D/2} \right. \\
& \quad + w_\mu(0) w^\mu(0) [(sw(0) - tw(0))^2]^{1-D/2} \\
& \quad - w_\mu(1) w^\mu(0) [(sw(1) - tw(0))^2]^{1-D/2} \\
& \quad \left. - w_\mu(0) w^\mu(1) [(sw(0) - tw(1))^2]^{1-D/2} \right) \\
& - \int_0^1 ds \int_0^1 d\tau \dot{w}_\mu(\tau) \left(w^\mu(1) [(sw(1) - w(\tau))^2]^{1-D/2} \right. \\
& \quad \left. - w^\mu(0) [(sw(0) - w(\tau))^2]^{1-D/2} \right) \\
& \left. - \int_0^1 dt \int_0^1 d\sigma \dot{w}_\mu(\sigma) \left(w^\mu(1) [(w(\sigma) - tw(1))^2]^{1-D/2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - w^\mu(0) [(w(\sigma) - tw(0))^2]^{1-D/2} \right) \right] \quad (4.51) \\
= & (2, 2) + (3, 3) + (1, 1) + (3, 1) + (1, 3) + (3, 2) + (1, 2) + (2, 3) + (2, 1).
\end{aligned}$$

Eine sorgfältige Analyse der neun Summanden in (4.51) zeigt, daß das Ergebnis genau mit demjenigen in Feynman-Eichung übereinstimmt. Das ist in der letzten Zeile dargestellt. Die Reihenfolge der „Verbindungen“ (A, B) entspricht dabei der Reihenfolge der Summanden in den vorausgehenden Zeilen.

Die regularisierten Ergebnisse für Feynman-Eichung einerseits und radiale Eichung andererseits stimmen also überein. Nun könnte man noch den renormierten Wert des Wilson-Loops berechnen. Da wir uns aber nur dafür interessieren, ob man bei Verwendung unseres radialen Propagators für eichinvariante Größen die gleichen Ergebnisse erhält wie in anderen Eichungen, ersparen wir uns die Renormierungsprozedur. Sie ist in [64] für beliebige Loops dargestellt. Auch die

regularisierten Wilson-Loops sind schließlich eichinvariant, nicht nur die renormierten.

Trotzdem wollen wir noch kurz das Renormierungsverhalten des betrachteten Wilson-Loops qualitativ diskutieren. Verursacht durch den Knick am Ursprung erhält man ein durch den Winkel des Knicks charakterisiertes divergentes Ergebnis. Ist das durch w parametrisierte Wegstück nicht glatt oder schließt es nicht glatt an die geraden Wegstücke an, so gibt es zusätzliche weitere Divergenzen. Sie spielen aber für die weiteren Ausführungen keine Rolle. In jedem Fall muß die *cusp*-Divergenz am Ursprung in jeder beliebigen Eichung reproduziert werden. Normalerweise geschieht das durch die Parameterintegrale in der Nähe des Ursprungs. Bei einer Eichwahl, bei der der Propagator aber in der Nähe des Ursprungs verschwindet, gibt es keine Integrale, die die Divergenz reproduzieren, außer der Propagator selbst ist divergent. Das singuläre Verhalten des radialen Propagators ist also nicht nur erklärbar, sondern auch notwendig, um das richtige Renormierungsverhalten von Wilson-Loops zu liefern.

Bevor wir weitere Berechnungen zur Überprüfung unserer radialen Feynman-Regeln durchführen, holen wir etwas nach, was wir bisher versäumt haben, nämlich auf die Frage einzugehen, ob es nicht auch andere Vorschläge in der Literatur gibt, wie ein (insbesondere endlicher) radialer Propagator aussehen könnte. Die erste Version findet sich in [20]. Später wurde allerdings gezeigt [21], daß der dort präsentierte Propagator $\Gamma_{\mu\nu}(x, y)$ nicht symmetrisch ist unter Austausch aller inneren Variablen, bzw. umgekehrt, daß die symmetrische Kombination $\frac{1}{2}[\Gamma_{\mu\nu}(x, y) + \Gamma_{\nu\mu}(y, x)]$ keine Lösung der Gleichung für den freien Propagator darstellt. Eine Zwei-Punkt-Funktion $\langle A_\mu(x)A_\nu(y) \rangle$ muß aber *per constructionem* symmetrisch sein. In [21] wird ferner argumentiert, daß es im vierdimensionalen Raum keinen radialen Propagator gibt, und zudem vorgeschlagen, bei störungstheoretischen, dimensionsregularisierten Rechnungen den Propagator (4.31) zu verwenden. Wir schließen uns natürlich dieser Meinung vollkommen an und können, wie im letzten Abschnitt geschehen, darüber hinaus begründen, warum der radiale Propagator in vier Dimensionen divergent ist.

Eine endliche und symmetrische Version für den Propagator wird in [68] präsentiert. Ausgangspunkt ist die Feststellung, daß man statt der Feldstärkeformel (4.24) alternativ auch

$$\bar{A}_\mu(x) = - \int_1^\infty ds s x_\nu F_{\nu\mu}(sx) \quad (4.52)$$

verwenden könnte. Offenbar erfüllt auch $\bar{A}_\mu(x)$ die radiale Eichbedingung (2.75). Allerdings ist diese Lösung am Ursprung divergent. Das sieht man bei der Berechnung von

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |x| \bar{A}_\mu(x), \quad (4.53)$$

was bei Wohlverhalten am Ursprung Null ergeben sollte. Mit der Substitution $t = s|x|$ ergibt sich aber

$$-\lim_{|x| \rightarrow 0} \int_{|x|}^{\infty} dt t \hat{x}_\nu F_{\nu\mu}(t\hat{x}) = -\int_0^{\infty} dt t \hat{x}_\nu F_{\nu\mu}(t\hat{x}), \quad (4.54)$$

und es gibt keinen Grund, warum dieser Ausdruck für beliebige Feldstärke-Konfigurationen verschwinden sollte.

Während die Feldstärkeformel (4.24) die (einzige) Lösung liefert, die am Ursprung wohldefiniert ist, erhält man durch (4.52) eine Lösung, die im Unendlichen verschwindet. Wie sich das aus der Feldstärkeformel (4.24) gewonnene A_μ -Feld im Unendlichen verhält, ist an dieser Stelle nicht so klar ersichtlich. Wir kommen aber in Kürze wieder darauf zurück und stellen — einstweilen ohne Beweis — fest, daß (4.52) im Unendlichen ein schnelleres Verschwinden des Eichfeldes erzwingt als die Feldstärkeformel (4.24). Versucht man, aus (4.52) einen Propagator zu berechnen, so erhält man auch hier ein divergentes Ergebnis — diesmal für vier und weniger Dimensionen anstatt wie in unserem Fall für vier und mehr. Da die Divergenzen aber durch die Parameterintegrale verursacht werden, die für den effektiven Abstand $sx - ty$ auch verschwindende Werte erlauben, kann man durch gleichzeitige Verwendung von (4.24) und (4.52) auf folgende Art einen endlichen Ausdruck für den radialen Propagator erhalten [68]: Man berechnet

$$G_{\mu\nu}(x, y) := -\int_0^1 ds s x_\alpha \int_1^\infty dt t y_\beta \langle F_{\alpha\mu}(sx) F_{\beta\nu}(ty) \rangle \quad (4.55)$$

und bildet daraus den symmetrischen Ausdruck

$$\frac{1}{2} [G_{\mu\nu}(x, y) + G_{\nu\mu}(y, x)]. \quad (4.56)$$

Das so erhaltene Objekt ist endlich, aber am Ursprung nicht wohldefiniert [68]. Der Definitionsbereich für x und y ist also jeweils auf $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ beschränkt. Wie bereits in Abschnitt 4.2 erwähnt, gilt das Gleiche für den in [38] präsentierten Ausdruck für den Propagator. Berechnet man obigen Wilson-Loop mit dem Propagator (4.56), so stimmt das Ergebnis übrigens nicht mit dem Feynman-Resultat überein. Tatsächlich darf man diesen Propagator gar nicht für eine Kontur (4.45) verwenden, weil der Ursprung auf der Kontur liegt. In [68] sind solche Loops auch explizit ausgeschlossen. Für die im nächsten Kapitel folgenden Anwendungen ist dieser Propagator also nicht interessant.

An mehreren Stellen haben wir das Randverhalten am Ursprung (allgemein am Eichpunkt z) diskutiert. Wie steht es nun „auf der anderen Seite“, d.h. im Unendlichen? Um darüber etwas zu erfahren, betrachten wir obige Kontur (4.45)

für den speziellen Fall $x, y \rightarrow \infty$. Genauer gesagt wählen wir w so, daß der ganze zweite Teil der Kontur im Unendlichen liegt. Zunächst könnte man erwarten, daß dieser dann nichts zum Wert des Wilson-Loops beiträgt. Tatsächlich ist das für die Feynman-Eichung richtig. Für die radiale Eichung kann es aber kaum stimmen, da hier bereits der erste und dritte Teil der Kontur keinen Beitrag liefern, der Wilson-Loop also dann den Wert $e^0 = 1$ hätte. Der Wert von eichinvarianten Größen wird aber durch die physikalische Situation bestimmt und nicht durch die Wahl der Eichung. Nimmt man Feynman- und radialen Propagator etwas genauer unter die Lupe, so stellt man fest, daß ersterer im Unendlichen quadratisch abfällt, genauer

$$D_{\mu\nu}^F(x, y) \sim \frac{1}{|x|^{D-2}} \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty, \quad (4.57)$$

während der radiale Propagator (4.31) nur linear abnimmt. Das sieht man am besten an seinem divergenten Anteil (E.32)

$$U_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \delta^{ab} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot \gamma_{xy} \right) \sim \frac{1}{|x|}. \quad (4.58)$$

Das hat zur Folge, daß der zweite Teil des Wilson-Loops in radialer Eichung nicht verschwindet, sondern gerade den Beitrag liefert, der sich in Feynman-Eichung für den ersten und dritten Teil ergibt, was wir ja oben für Wilson-Loops mit beliebigem Wegstück w gezeigt haben. Wir halten also fest, daß in radialer Eichung der Propagator bzw. allgemein die Eichfelder im Unendlichen schwächer abfallen als in Feynman-Eichung.

Als nächstes wenden wir uns der Berechnung beliebiger eichinvarianter Größen zu.

4.4.2 Eichinvariante Größen allgemein – Das Äquivalenztheorem von Cheng und Tsai und seine Erweiterung auf die radiale Eichung

Wie in Abschnitt 3.2 dargestellt, gibt es ein Äquivalenztheorem, das Impulsraum-Feynman-Regeln in verschiedenen Eichungen miteinander in Beziehung setzt [33]. Wir werden nun dieses Theorem auf Feynman-Regeln im Ortsraum ausdehnen mit dem Ziel, das Theorem auf unseren Fall der radialen Eichung anzuwenden. Im Zuge dieser Erweiterung skizzieren wir kurz den Beweis des Theorems, was nicht zuletzt auch deshalb angebracht ist, weil die ganze Darstellung [33] leider nur als Vorabdruck existiert, also nicht in Bibliotheken frei zugänglich ist.

Ab jetzt arbeiten wir wieder im Minkowski-Raum. Im Wesentlichen bedeutet das nur, daß die Propagatorpole in (4.31) durch eine ϵ -Vorschrift analog zu (C.2) regularisiert werden. An der Singularität der Parameterintegrale ändert das freilich nichts, da die ϵ -Regularisierung in Loop-Rechnungen nur greifen kann, wenn

diskrete Pole auftreten. Wenn dagegen, wie in unserem Fall, der Propagator fast überall singulär ist, nutzt eine Polvorschrift gar nichts. Man braucht dann eben Dimensionsregularisierung oder etwas Gleichwertiges. Am Ende dieses Kapitels werden wir kurz auf die Renormierungseigenschaften von Wilson-Loops im Minkowski-Raum und die Konsequenzen für unseren radialen Propagator eingehen. Einstweilen halten wir einfach fest, daß wir alle bisherigen Ergebnisse durch Wick-Rotation in den Minkowski-Raum transformieren.

Nun zurück zum Äquivalenztheorem von Cheng und Tsai. Im Ortsraum formuliert besagt es folgendes:

Für einen beliebigen freien Propagator

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = \delta^{ab} \left(D_{\mu\nu}^F(x, y) - \partial_\mu^x \Delta_\nu(x, y) - \partial_\nu^y \Delta_\mu(y, x) \right), \quad (4.59)$$

d.h. für beliebige Δ_μ , sind alle eichinvarianten Größen unabhängig von $\Delta_\mu(x, y)$, wenn man für das Produkt aus Geist-Propagator und Geist-Gluon-Vertex den Ausdruck

$$G_\mu^{abc}(y, x) = -igf^{abc} \left((g_{\mu\nu} \square_x - \partial_\mu^x \partial_\nu^x) \Delta^\nu(y, x) + \partial_y^\nu D_{\mu\nu}^F(x, y) \right) \quad (4.60)$$

und ansonsten die üblichen Feynman-Regeln für Drei- und Vier-Gluon-Vertizes (C.5, C.6) verwendet. Die Einbeziehung von Materiefeldern mit den üblichen Feynman-Regeln ist problemlos möglich. Zunächst betrachten wir aber nur den Eichsektor, genau wie übrigens auch in [33]. In Anhang G findet sich die zusätzliche Rechenregel, die man bei Berücksichtigung von Fermionfeldern für den Beweis des Äquivalenztheorems benötigt. Offenbar ergibt sich in (4.59) der Feynman-Propagator aus dem allgemeinen für den Spezialfall $\Delta_\mu = 0$. Genauso ergibt sich der Feynman-Geist aus der allgemeinen Relation (4.60), also

$$G_\mu^{abc}(y, x) = -igf^{abc} (g_{\mu\nu} \square_x - \partial_\mu^x \partial_\nu^x) \Delta^\nu(y, x) + G_\mu^{F abc}(y, x). \quad (4.61)$$

Der Beweis des Äquivalenztheorems gründet auf der Beobachtung, daß die beliebigen Funktionen Δ_μ im Propagator (4.59) stets von Ableitungsoperatoren begleitet werden. Diese kann man durch partielle Integration auf den jeweiligen Vertex abwälzen, was für den Drei-Gluon-Vertex (C.5) folgendes liefert:

$$\begin{aligned} \partial_w^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{abc}(w, x, y) &= igf^{abc} \left[\delta(w - y) (g_{\nu\mu} \square_w - \partial_\nu^w \partial_\mu^w) \delta(w - x) \right. \\ &\quad \left. - \delta(w - x) (g_{\mu\nu} \square_w - \partial_\mu^w \partial_\nu^w) \delta(w - y) \right]. \quad (4.62) \end{aligned}$$

Die Operatoren in den runden Klammern projizieren offensichtlich auf zu ∂_μ transversale Größen, d.h.

$$(g_{\nu\mu} \square_w - \partial_\nu^w \partial_\mu^w) \partial_w^\mu = 0. \quad (4.63)$$

Sie wirken nun weiter auf den jeweils nächsten Propagator, der bei x, μ, b oder bei y, ν, c an den Vertex anknüpft, also z.B.

$$\begin{aligned} & igf^{abc} \int d^D x (g_{\nu\mu} \square_w - \partial_\nu^w \partial_\mu^w) \delta(w-x) D_{bb'}^{\mu\mu'}(x, x') \\ &= -gf^{ab'c} g_\nu^{\mu'} \delta(w-x') + \partial_{x'}^{\mu'} G_\nu^{ab'c}(x', w). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Wir sehen daran, daß hier zum einen den Geistern ähnliche Strukturen entstehen. Wie wir im folgenden zeigen werden, kürzen sich die so entstehenden Terme bei eichinvarianten Größen gegen „normale“ Geistbeiträge weg. Zum anderen haben wir Terme $-gf_{a'b'c} g_\nu^{\mu'} \delta(w-x')$, also abgesehen von der Farbstruktur Einsen in den Koordinaten und der Lorentz-Struktur, die nichts anderes tun, als den betrachteten Vertex mit einem anderen zusammenzuziehen. Aus zwei Drei-Gluon-Vertizes wird dadurch so etwas wie ein Vier-Gluon-Vertex. Soweit der kleine Ausblick auf das Folgende. Zusammengenommen ergibt sich aus (4.62) und (4.64)

$$\begin{aligned} & \int d^D x d^D y \partial_w^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{abc}(w, x, y) D_{bb'}^{\mu\mu'}(x, x') D_{cc'}^{\nu\nu'}(y, y') = \\ & \int d^D y \left[-gf^{ab'c} g_\nu^{\mu'} \delta(w-x') \delta(w-y) + \partial_{x'}^{\mu'} G_\nu^{ab'c}(x', w) \delta(w-y) \right] D_{cc'}^{\nu\nu'}(y, y') \\ & - \int d^D x \left[-gf^{abc'} g_\mu^{\nu'} \delta(w-y') \delta(w-x) + \partial_{y'}^{\nu'} G_\mu^{abc'}(y', w) \delta(w-x) \right] D_{bb'}^{\mu\mu'}(x, x'). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Bis jetzt ist das Ganze noch sehr unanschaulich; eine graphische Darstellung von (4.65) sollte weiterhelfen, Abb. 4, wie überhaupt die Stärke der ganzen Methode darin besteht, daß man die notwendigen Rechnungen alle graphisch durchführen kann.

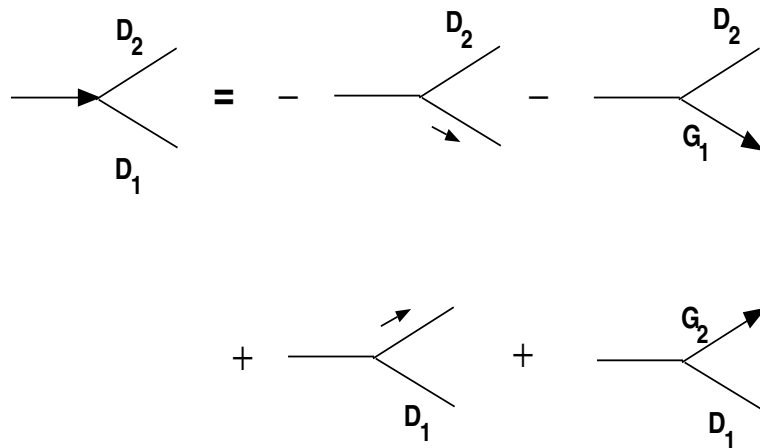


Abbildung 4: Graphische Veranschaulichung der Wirkung des Ableitungsoperators auf den Drei-Gluon-Vertex.

In den Abbildungen dieses Abschnitts stehen die geraden Linien, die mit einem D markiert sind, für Gluon-Propagatoren. G symbolisiert den Geist und bezieht sich auf die Linie und den Vertex, bei denen es steht. Ein Pfeil auf einer Linie bezeichnet einen Ableitungsoperator ∂_μ , der auf den Vertex wirkt, auf den er zeigt. Schließlich bezeichnet ein äußerer Pfeil die oben erwähnte Eins (zusammen mit seiner Farbstruktur).

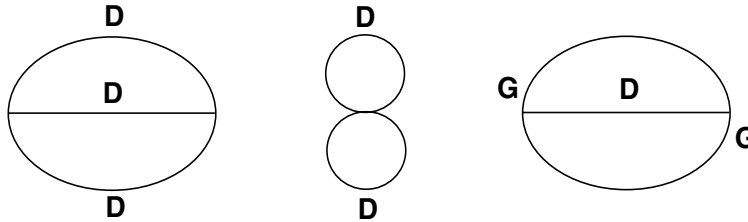


Abbildung 5: Zwei-Loop-Vakuüm-Diagramme.

Um die Methode darzustellen, werden wir explizit für den g^2 -Beitrag der Vakuüm-Diagramme (Abb. 5) die Eichinvarianz zeigen. Dazu ein paar Vorbemerkungen: Vakuüm-Diagramme sind natürlich keine physikalischen Objekte, durch das Renormierungsprogramm werden sie auf Null gesetzt. Trotzdem kann man die regularisierte Version berechnen, und zusammengenommen müssen die Diagramme eichinvariant sein. Insofern ist das durchaus ein Test für die „Verträglichkeit“ verschiedener Sätze von Feynman-Regeln [69]. Zudem kann man das gleiche Verfahren, das wir hier vorstellen, statt im Vakuüm bei endlicher Temperatur durchführen. Dort kommt den geschlossenen Diagrammen eine physikalische Bedeutung zu, sie bilden nämlich zusammen die großkanonische Zustandssumme für das Quantengas, das durch die entsprechende Lagrange-Dichte charakterisiert wird, in unserem Fall also für ein Gluon-Gas [41]. Allerdings tritt bei endlicher Temperatur ein neues Problem auf; es entstehen Infrarot-Divergenzen, die durch die Masselosigkeit der Gluonen verursacht werden. Bisher ist dieses Problem noch nicht vollständig gelöst. Ein Teilerfolg wurde dadurch erzielt, daß eine bestimmte Klasse von Diagrammen mit Hilfe der Dyson-Schwinger-Gleichung aufsummiert werden konnte [70]. Dadurch konnte zumindest im farb-elektrischen Sektor der Theorie den Gluonen eine dynamisch erzeugte Masse zugewiesen werden, die die Infrarot-Divergenzen behebt. Eine analoge Regularisierung im farb-magnetischen Sektor steht bisher noch aus, und es bestehen Zweifel, ob das überhaupt störungstheoretisch möglich ist [71]. Auch für die im farb-elektrischen Bereich erfolgreiche resummierte Störungstheorie gibt es bisher keinen Beweis, daß die so berechneten physikalischen Größen, z.B. die Zustandssumme, eichinvariant sind, d.h. daß das Resummationsschema die Eichinvarianz der Theorie respektiert. Das wird zur Zeit für die g^4 -Beiträge zur Zustandssumme überprüft, und zwar genau mit dem hier dargestellten Verfahren [72].

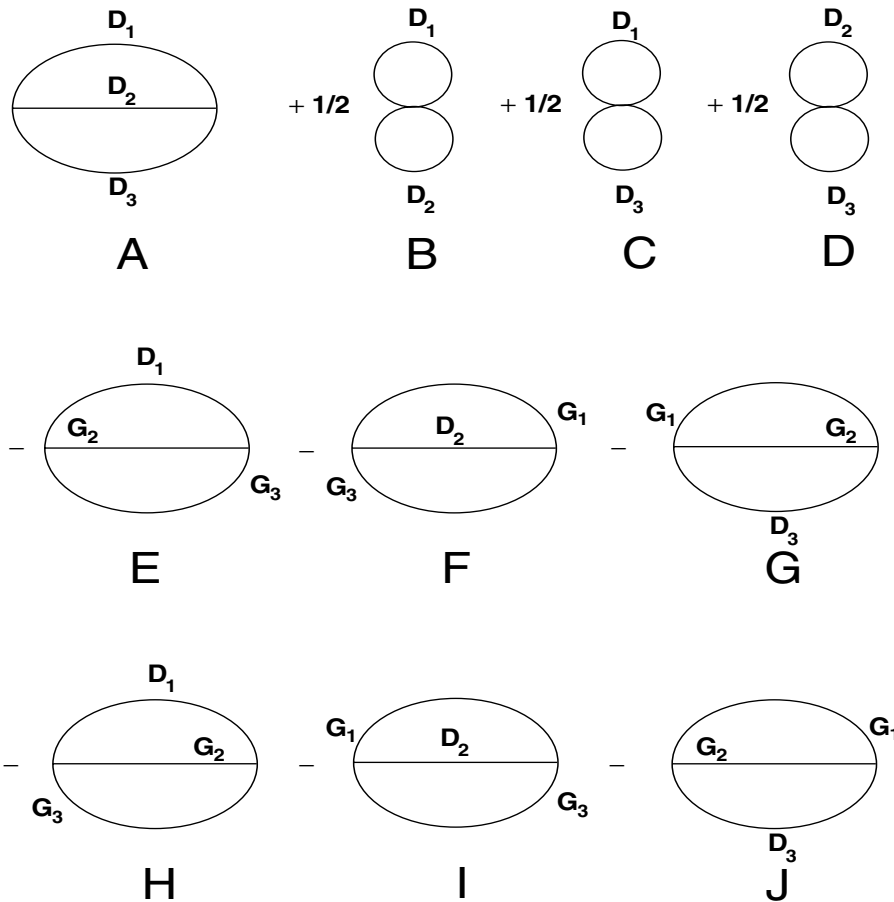


Abbildung 6: Die (hoffentlich) eichinvariante Summe der Vakuumbiagramme.

Genug der Abschweifungen, kommen wir zu unseren Vakuumbiagrammen aus Abb. 5 zurück. Zunächst bestimmen wir die kombinatorischen Faktoren der drei Diagramme [73]. Es ergibt sich $1/12$ für das Diagramm mit den Drei-Gluon-Vertizes, $1/8$ für den Vier-Gluon-Graphen und $1/2$ für das Geist-Diagramm. Insgesamt haben wir also die Summe der Diagramme in Abb. 6 zu betrachten. Die relativen kombinatorischen Faktoren sind dabei explizit angegeben, die ganze Summe besitzt einen Faktor $1/12$ in der Störungsreihe. Die Faktoren -1 für jede geschlossene fermionische Geistschleife sind ebenfalls explizit angegeben. Zudem haben wir die Linien durchnummeriert und die Diagramme bezüglich der Nummern symmetrisiert. Die Aussage der Eichinvarianz ist nun, daß sich der Wert der Summe nicht verändert, wenn man überall D und G durch D^F und G^F ersetzt. Das Äquivalenztheorem geht aber noch ein Stück darüber hinaus: Wenn man die gerade erwähnte Ersetzung gleichzeitig in *allen* Diagrammen nur an je-

weils *einer* Linie vornimmt, z.B. an denen mit Nummer 1, so bleibt auch dann der Wert der Summe gleich. Das wollen wir nun für unsere Vakuum-Diagramme zeigen. Der Beweis der Eichinvarianz erfolgt dann Schritt für Schritt; zuerst wird Linie 1 geändert, dann Linie 2, etc. Es reicht dann aber für den Gesamtbeweis, nur eine Linie zu betrachten, wenn man bei den anderen nicht spezifiziert, ob sie schon vorher geändert wurden oder nicht. D.h. wir betrachten nun den Fall, daß D_1 und G_1 durch (4.59) bzw. (4.60) gegeben sind, und spezifizieren die Linien 2 und 3 nicht weiter, außer natürlich dahingehend, daß z.B. G_2 der Geist ist, der zu D_2 gehört.

Wir zerlegen den Propagator 1 des Diagramms in Abb. 6 A in seine drei Teile (Abb. 7) gemäß (4.59) und betrachten eines der beiden Δ -haltigen Diagramme weiter.²⁰

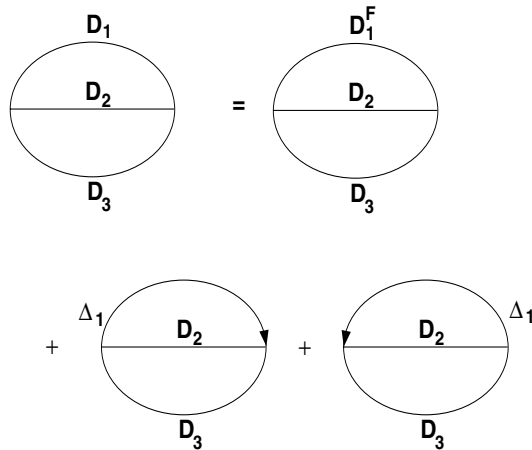


Abbildung 7: Graphische Zerlegung eines Propagators.

Nun wenden wir unsere Rechenregel aus Abb. 4 an und erhalten Abb. 8.

Offensichtlich haben wir nun zwei verschiedene Sorten von Diagrammen. Bei denjenigen mit Geistern G taucht wieder ein Ableitungsoperator (Pfeil) auf, der auf einen Vertex trifft, und wir können (4.62) erneut anwenden. Zusätzlich zu (4.64) brauchen wir aber eine Relation, in der der Propagator D durch Δ ersetzt ist. Das ist aber gerade (4.61). Insgesamt ergibt sich daraus Abb. 9. Die zugehörige Formel lautet

$$\int d^Dx d^Dy \partial_w^\lambda T_{\lambda\mu\nu}^{abc}(w, x, y) \Delta^\mu(x', x) D_{cc'}^{\nu\nu'}(y, y') = \quad (4.66)$$

²⁰Die geänderten Vorzeichen in Abb. 7 gegenüber (4.59) erklären sich daraus, daß in der Graphik die Ableitungsoperatoren bereits auf die Vertizes wirken — partielle Integration!

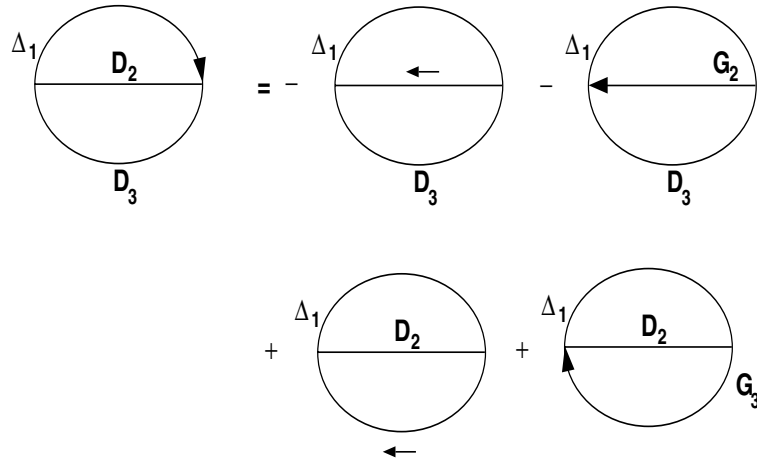
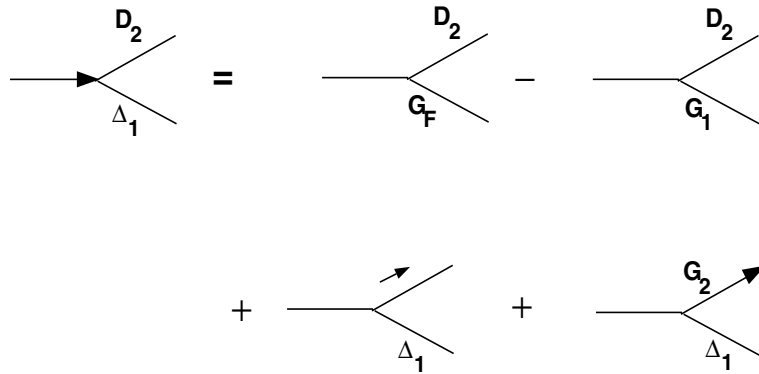


Abbildung 8: Anwendung der Rechenregel aus Abb. 4.

$$\int d^D y \left[G_\nu^{F abc}(x', w) \delta(w - y) - G_\nu^{abc}(x', w) \delta(w - y) \right] D_{cc'}^{\nu\nu'}(y, y')$$

$$- \int d^D x \left[-g f^{abc'} g_\mu^{\nu'} \delta(w - y') \delta(w - x) + \partial_{y'}^{\nu'} G_\mu^{abc'}(y', w) \delta(w - x) \right] \Delta^\mu(x', x).$$

Abbildung 9: Graphische Veranschaulichung der Wirkung des Ableitungsoperators auf den Drei-Gluon-Vertex, wenn an einem der Beine Δ_μ hängt.

Für ein Diagramm mit einer Geistlinie aus Abb. 8 erhalten wir so Abb. 10. Das zweite Diagramm auf der rechten Seite ist offenbar gerade das Negative des Geistdiagramms aus Abb. 6 G.

Auch aus dem letzten Diagramm kann man eine Geistschleife machen, indem man den Ableitungsoperator nach außen zieht, d.h. durch partielle Integration

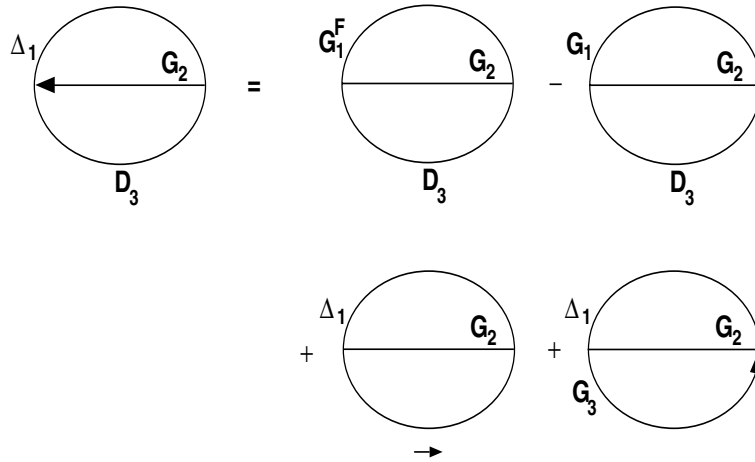


Abbildung 10: Anwendung der Rechenregel aus Abb. 9.

und Aufteilen des Operators auf die beiden Beinen (Produktregel). Dabei trifft er einerseits auf den Geist,

$$\partial_\mu^x G_{abc}^\mu(y, x) = \partial_\mu^x G_{F abc}^\mu(y, x) = -g f_{abc} \delta(x - y), \quad (4.67)$$

und andererseits auf die obere Linie. Das ist in Abb. 11 graphisch dargestellt. Dazu gehört die Gleichung

$$\int d^D x \delta(v - x) \partial_\mu^x [G_{abc}^\mu(y, x) \delta(x - w)] = \int d^D x \delta(x - w) \partial_\mu^x [G_{abc}^\mu(y, x) \delta(v - x)] - \int d^D x \delta(v - x) g f_{abc} \delta(x - y) \delta(x - w). \quad (4.68)$$

Die **1** in Abb. 11 steht dabei für den letzten Integranden.

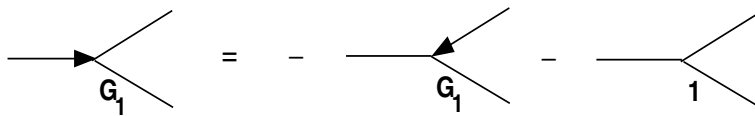


Abbildung 11: Umwälzen des Pfeiles.

Von einem äußeren Pfeil unterscheidet sich die **1** durch das Fehlen eines $g_{\mu\nu}$ -Terms. So zerfällt das letzte Diagramm aus Abb. 10 in zwei andere. Hier kann man aus der **1** einen Pfeil machen (Abb. 12).

Um wieder etwas Überblick zu gewinnen, sammeln wir zusammen, was aus den beiden G -haltigen Diagrammen aus Abb. 8 geworden ist (Abb. 13) und vergleichen das Ergebnis mit Abb. 6.

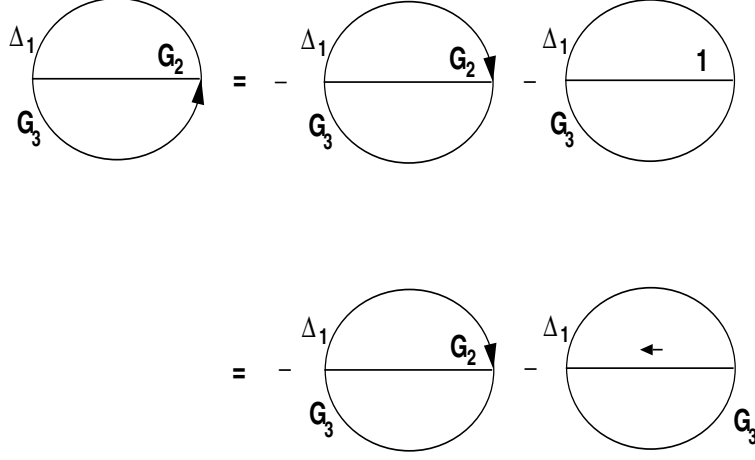


Abbildung 12: Herausziehen des Pfeiles aus der Geistschleife.

Zehn analoge (spiegelverkehrte) Diagramme zu den in Abb. 13 dargestellten entstehen aus dem letzten Graphen von Abb. 7, die wir aber nicht explizit angeben. Die Graphen a und b aus Abb. 13 ersetzen in Abb. 6 G den Geist G_1 durch G_1^F ; das Gleiche bewirken i und j aus Abb. 13 bei I in Abb. 6. Genauso modifizieren die nicht abgebildeten analogen Diagramme die Graphen J und F. d und sein Analogon verwandeln in H den Propagator D_1 in D_1^F ; entsprechendes gilt für g und E. Schließlich heben sich c gegen h und e gegen f weg.

Für die Diagramme mit Geistern (Abb. 6 E-J) haben wir also unser Ziel erreicht, D_1 durch D_1^F und G_1 durch G_1^F zu ersetzen. Übrig bleiben die Vier-Gluon-Vertex-Graphen B und C aus Abb. 6²¹ und die „geistlosen“ Diagramme in Abb. 8 sowie deren Analoga mit Δ_1 auf der rechten Seite. Jetzt zerlegen wir D_1 in Abb. 6 B in seine Bestandteile (Abb. 14) und stellen fest, daß die beiden Δ -Anteile wegen der vollkommenen Symmetrie des Vier-Gluon-Vertex zweimal den gleichen Beitrag liefern.

Wir brauchen nun eine Regel, die äußere Pfeile mit Vier-Gluon-Vertizes verknüpft. Durch längeres Rechnen kann man verifizieren, daß Abb. 15 genau das liefert. Die entsprechende Formel lautet

$$\begin{aligned}
& - \int d^D w' g f_{abe} g^\lambda{}_\lambda \delta(v-w) \delta(v-w') T_{ecd}^{\lambda\mu\nu}(w', x, y) \\
& + \int d^D x' g f_{aec} g^\mu{}_\mu \delta(v-x) \delta(v-x') T_{edb}^{\mu\nu\lambda}(x', y, w) \\
& + \int d^D y' g f_{aed} g^\nu{}_\nu \delta(v-y) \delta(v-y') T_{ebc}^{\nu\lambda\mu}(y', w, x) = \partial_\kappa^v Q_{abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(v, w, x, y).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

²¹D bleibt unverändert, da hier keine 1-Linie vorkommt.

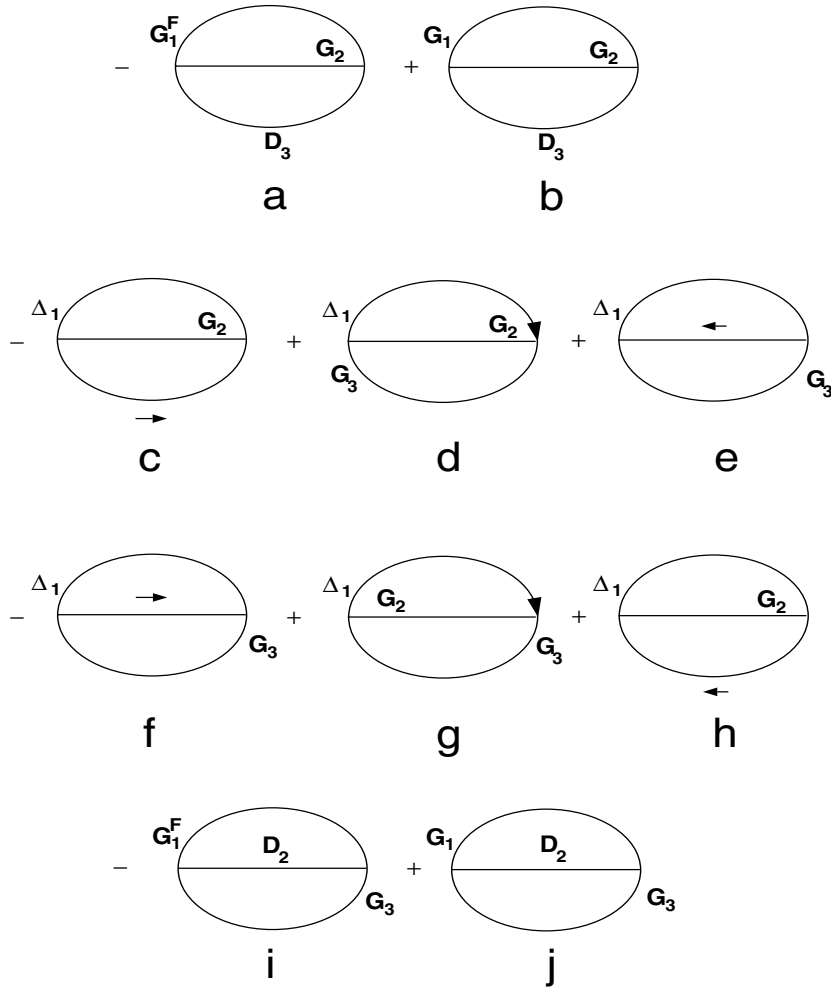


Abbildung 13: Berechnung der G -haltigen Beiträge aus Abb. 6 A.

Schreibt man nun in Abb. 15 an die von oben rechts kommende Linie Δ_1 und verbindet die oberen Linien miteinander und ebenso die unteren, so ergibt sich, daß das vorletzte Diagramm aus Abb. 8 zusammen mit seinem Gegenstück, bei dem Δ_1 rechts steht, gerade das Negative des letzten Diagramms aus Abb. 14 ist.²² Das Gleiche gilt für die Graphen, die D_3 statt D_2 enthalten (z.B. C statt B in Abb. 6), und damit ist der Beweis des Äquivalenztheorems für den Fall der g^2 -Beiträge der Vakuum-Diagramme abgeschlossen.

Im Prinzip ganz analog kann man den Beweis für die geschlossenen Drei-Loop-Diagramme [72], aber auch für Streuamplituden [33] und Wilson-Loops (andeu-

²²Beim Verknüpfen der oberen Linien fällt das dritte Diagramm von Abb. 15 auf Grund seiner Farbstruktur weg: $f^{abc}\delta_{ab} = 0$.

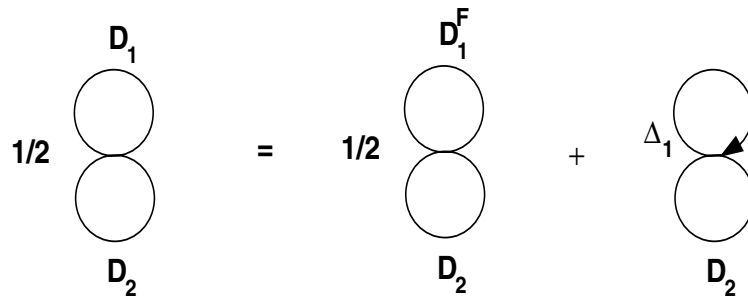


Abbildung 14: Zerlegung eines Propagators in Vier-Gluon-Vertex-Graphen.

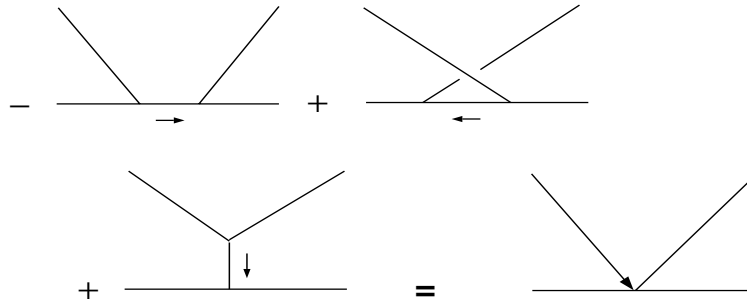


Abbildung 15: Relation zwischen Drei- und Vier-Gluon-Vertices.

tungsweise in [34]) durchführen. Ebenso kann man Fermionen mit einbeziehen. Die zusätzlichen Rechenregeln, die man hierzu benötigt, sind in Anhang G zusammengestellt. Natürlich sind all diese Rechnungen, obgleich graphisch durchführbar, wesentlich aufwendiger, da es mehr Diagramme gibt. So hat man bei der Berechnung des g^4 -Beitrags zu einem beliebigen Wilson-Loop fünf verschiedene Diagramme statt der drei in Abb. 5. Nach Durchnummerierung der Propagatoren und Symmetrisierung bekommt man siebenunddreißig Graphen statt der zehn in Abb. 6. Natürlich muß man davon nicht alle zerlegen (auch bei der hier dargestellten Rechnung haben wir ja einen Satz Diagramme, die zu den dargestellten analog waren, nicht explizit angegeben), aber andererseits kann ein einzelnes Diagramm ziemlich viele „Tochtergraphen“ erzeugen, z.B. bei Anwendung der Regel aus Abb. 9. So erhält man für den Wilson-Loop sechsunddreißig Diagramme, die man dann miteinander vergleichen muß. Im Falle der geschlossenen Drei-Loop-Diagramme hat man es mit insgesamt einundneunzig Graphen zu tun [74]. Das alles soll den Eindruck erhärten, daß diese Rechnungen wirklich durchgeführt

wurden, auch wenn sie hier nicht explizit dargestellt werden.

Wie steht es nun mit unserer radialen Eichung? Durch Vergleich von (4.31) mit (4.59) können wir Δ bestimmen:

$$\Delta_\nu(x, y) = x^\alpha \int_0^1 ds D_{\alpha\nu}^F(sx, y) - \frac{1}{2} \partial_y^\alpha \int_0^1 ds \int_0^1 dt x \cdot y D_{\alpha\nu}^F(sx, ty). \quad (4.70)$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnen der Geist

$$G_\nu^{abc}(x, y) = -igf^{abc} \left(x_\nu \int_0^1 ds \delta(sx - y) - \partial_y^\alpha D_{\alpha\nu}^F(0, y) \right). \quad (4.71)$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt

$$G_\nu^{abc}(x, y) \sim y_\nu \quad \Rightarrow \quad G_\nu^{abc}(x, y) D_{c'c}^{\nu\nu'}(y, y') = 0; \quad (4.72)$$

die Geistfelder entkoppeln somit von den Eichfeldern, wie es ja auch sein soll.

Der Beweis des Äquivalenztheorems für beliebige Propagatoren ist dargestellt, jetzt haben wir Δ und G für den Fall der radialen Eichung explizit angegeben. War's das also? Leider noch nicht ganz. Zwei Subtilitäten sind noch zu klären:

Zunächst gilt natürlich auch im Ortsraum die in [33] für den Impulsraum getroffene Feststellung, daß der Propagator nicht singulär sein darf. Ist er es doch (Beispiel: temporale Eichung, Abschnitt 3.2), so muß man eine Regularisierungsvorschrift angeben (z.B. die Hauptwert-Vorschrift (3.24)), und die Regularisierungen dürfen erst *nach* Ausführen aller Loop-Integrale beseitigt werden. Das hat bei der temporalen Eichung die unschöne Folge, daß der Propagator nicht mehr die temporale Eichbedingung erfüllt, solange der Regulator endlich ist.

In unserem Fall sind wir aber auf der sicheren Seite. Der radiale Propagator ist dimensionsregularisiert, und auch alle Loop-Rechnungen sind dimensionsregularisiert durchzuführen. Der große Vorteil unserer Beschreibung ist, daß der radiale Propagator auch schon für $D \neq 4$ — also sozusagen für endlichen Regulator — die radiale Eichbedingung erfüllt.

Die zweite Sache, die man beachten muß, ist schwerwiegender: Beim oben dargestellten Beweis fiel des öfteren das Zauberwort „partielle Integration“. Hier muß man sich vergewissern, ob dabei nicht unliebsame Randterme entstehen. Da unser Propagator am Eichpunkt (hier am Ursprung) wohldefiniert ist, kann es dort keine Probleme geben. Wie steht es aber im Unendlichen? Die Frage ist durchaus berechtigt, zumal wir im letzten Abschnitt festgestellt haben, daß der radiale Propagator schwächer abfällt als etwa der Feynman-Propagator — nämlich nur linear, vgl. (4.58). Betrachtet man den Propagator (4.31) genauer, so stellt man

fest, daß das schwache Abfallen höchstens auf der Seite des Propagators auftaucht, die eine partielle Ableitung besitzt. So überzeugt man sich z.B. leicht davon, daß der zweite Summand von (4.31) für $y \rightarrow \infty$ ganz normal abfällt. Schwächeres Abfallen kann es nur für $x \rightarrow \infty$ geben. Der schlimmstmögliche Fall ist deshalb, daß an einem Vertex, an dem man partiell integrieren möchte, um die oben beschriebenen Rechenricks anwenden zu können, nur ∂_μ -Terme zusammentreffen. Prototyp dieses Problems ist

$$\int d^D w \int d^D x \int d^D y T_{abc}^{\lambda\mu\nu}(w, x, y) \partial_\lambda^w \Delta_{\lambda'}(w, w') \partial_\mu^x \Delta_{\mu'}(x, x') \partial_\nu^y \Delta_{\nu'}(y, y'). \quad (4.73)$$

Nach Ausintegration der beiden δ -Funktionen des Drei-Gluon-Vertex (C.5) bleibt ein D -dimensionales Integral, sagen wir über x , übrig. Durch Einheitszählen kann man dann das Randverhalten studieren. Jeder $\partial \Delta$ -Term fällt mit $1/|x|$ ab, und durch die Ableitung im Drei-Gluon-Vertex kommt noch eine Längeneinheit im Nenner hinzu. Wir haben damit insgesamt ein Randverhalten $1/|x|^4$ des Integranden gegen das D -fache Integral, insgesamt also ein logarithmisches Verhalten für $D \rightarrow 4$. Bei partieller Integration muß man deshalb mit Oberflächentermen rechnen. Zugleich zeigt aber diese Überlegung — da das der schlimmstmögliche Fall ist — daß man keine Probleme hat, sobald wenigstens eine der drei Funktionen $\partial_\mu \Delta_\nu$ durch eine harmlosere, z.B. $D_{\mu\nu}^F$, ersetzt wird. Glücklicherweise bereitet obiger Fall aber nur scheinbar Schwierigkeiten. Wertet man (4.73) nämlich aus, indem man den Drei-Gluon-Vertex (C.5) explizit einsetzt, so ergibt sich Null. Das wird durch die Lorentz-Struktur verursacht, was man bei obigem Dimensionszählen natürlich nicht merkt. Dieses wiederum muß mit dem Ergebnis der partiellen Integration übereinstimmen, wenn man mögliche Oberflächenterme berücksichtigt. Nun ergibt aber in (4.73) die partielle Integration einer der Ableitungen, die auf die Δ -Terme wirken, zum einen Oberflächenterme und zum anderen die Struktur (4.62). Diese wirkt aber weiter auf die verbleibenden beiden Ableitungsoperatoren und liefert daher wegen (4.63) ebenfalls Null. Schließlich und endlich ergeben sich die Oberflächenterme als Differenz der beiden verschwindenden Ergebnisse also auch zu Null. Da das der einzige (scheinbar) problematische Fall ist, folgern wir, daß man in der Praxis tatsächlich partiell integrieren darf. Und damit ist nun wirklich der oben dargestellte Beweis auch für die Feynman-Regeln der radialen Eichung anwendbar. Insbesondere entkoppeln die Geister von den Gluon-Feldern. Der Preis, den man dafür zu zahlen hat, ist aber trotzdem sehr hoch: der freie radiale Propagator ist nur dimensionsreguliert wohldefiniert.

Bevor wir im nächsten Abschnitt die Slavnov-Taylor-Identitäten der radialen Eichung betrachten, wollen wir noch auf eine interessante Querverbindung hinweisen: Wie bereits erwähnt, wurde in [38] die Singularität des freien Propagators durch zusätzliche Eichfixierung der rein winkelabhängigen Eichtransformationen behoben. Analog zur temporalen Eichung, bei der die verbliebenen raumartigen Eichfreiheitsgrade auf einer zeitlich konstanten Hyperfläche fixiert werden können,

vgl. (3.30), wird hier eine zusätzliche Eichfixierung auf einer Sphäre \mathcal{S} um den Ursprung implementiert. Dadurch entstehen auch Geistfelder, die an die Eichfelder koppeln — alles sehr ähnlich wie bei der temporalen Eichung, vgl. (3.31). Allerdings ist der so gebildete freie radiale Propagator am Ursprung nicht wohldefiniert. Schrumpft man aber nun die Sphäre \mathcal{S} auf den Ursprung zusammen, so erhält man wieder den in vier Dimensionen divergenten Ausdruck (4.31) zurück. Die Geistfelder gehen aber dann genau in den Ausdruck (4.71) über. Insofern ergeben sich die hier dargestellten radialen Feynman-Regeln als Spezialfall der in [38] angegebenen. Freilich ist es in der Philosophie von [38] der unliebsame Grenzfall, bei dem der Propagator divergiert. Aus dem Blickwinkel der hier dargestellten Arbeit dagegen ist der dimensionsregularisierte Propagator der einzig richtige, weil er am Ursprung wohldefiniert ist und weil man versteht, daß die Singularität im Grenzfall $D \rightarrow 4$ durch die enge Verknüpfung mit den Wilson-Loops und deren *cusp*-Divergenzen verursacht wird.

4.5 Slavnov-Taylor-Identitäten

Außer durch Berechnung von eichinvarianten Größen kann man auch durch die Überprüfung von Slavnov-Taylor-Identitäten [12] die Konsistenz von Feynman-Regeln testen. Diese Identitäten sind in der (eichfixierten) quantisierten Theorie das Gegenstück zur Eichinvarianz in der klassischen Theorie. Wir starten mit dem erzeugenden Funktional für die radial eichfixierte QCD bezüglich eines beliebigen Eichpunktes z und führen ein Lagrange-Multiplikator-Feld C ein:²³

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}[A, \psi, \bar{\psi}] \delta((x-z)_\mu A^\mu(x)) \\ & \times \exp\left(i \int d^D x (\mathcal{L}_{\text{QCD}}[A, \psi, \bar{\psi}](x) + J_\mu^a(x) A_a^\mu(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x))\right) \\ & = \int \mathcal{D}[A, C, \psi, \bar{\psi}] \exp\left(i \int d^D x (\mathcal{L}_{\text{QCD}}[A, \psi, \bar{\psi}](x) + C^a(x) (x-z)_\mu A_a^\mu(x) \right. \\ & \quad \left. + J_\mu^a(x) A_a^\mu(x) + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \eta(x))\right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Es erweist sich als günstig, auch für C eine erzeugende äußere Quelle K einzuführen. Das erzeugende Funktional ergibt sich dann zu

$$W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}] := \int \mathcal{D}[A, C, \psi, \bar{\psi}] \exp(i S_z[A, C, \psi, \bar{\psi}, J, K, \eta, \bar{\eta}]) \quad (4.75)$$

mit der Wirkung

$$S_z[A, C, \psi, \bar{\psi}, J, K, \eta, \bar{\eta}] := \quad (4.76)$$

²³Um die Ausdrücke auch im nächsten Kapitel unverändert weiterverwenden zu können, formulieren wir die Theorie im Minkowski-Raum. Vgl. dazu die Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts.

$$\int d^D x (\mathcal{L}_{\text{QCD}}[A, \psi, \bar{\psi}](x) + C^a(x)(x-z)_\mu A_a^\mu(x) + J_\mu^a(x)A_a^\mu(x) + K^a(x)C_a(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)).$$

Wir bezeichnen das zur Normierung notwendige erzeugende Funktional bei verschwindenden äußeren Quellen mit

$$W_z^0 := W_z[J = 0, K = 0, \eta = 0, \bar{\eta} = 0]. \quad (4.77)$$

Der Erwartungswert einer beliebigen Größe ξ ist dann gegeben durch

$$\langle \xi \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} := \frac{1}{W_z^0} \int \mathcal{D}[A, C, \psi, \bar{\psi}] \xi \exp(iS_z[A, C, \psi, \bar{\psi}, J, K, \eta, \bar{\eta}]). \quad (4.78)$$

Die entsprechende volle Greensche Funktion ist

$$\langle \xi \rangle_z := \langle \xi \rangle_{z, J=0, K=0, \eta=0, \bar{\eta}=0}. \quad (4.79)$$

Schließlich führen wir für die freie Greensche Funktion, d.h. für den Fall verschwindender Kopplung, die Bezeichnung

$$\langle \xi \rangle_z^0 := \langle \xi \rangle_z \Big|_{g=0} \quad (4.80)$$

ein.

Da in (4.75) über beliebige Eichfeld-Konfigurationen integriert wird, kann eine (infinitesimale) Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - D_\mu[A]\omega \quad (4.81)$$

$$\psi \rightarrow \psi - ig\omega\psi \quad (4.82)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + ig\bar{\psi}\omega \quad (4.83)$$

das erzeugende Funktional nicht verändern.²⁴ Variation von W_z nach ω liefert [20]

$$\langle D_\mu^{ab}[A](x) [(x-z)^\mu C_b(x) + J_b^\mu(x)] - ig\bar{\eta}(x)t^a\psi(x) + ig\bar{\psi}(x)t^a\eta(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} = 0. \quad (4.84)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun alle Slavnov-Taylor-Identitäten ableiten. Dazu ist es sinnvoll, die Gleichung nach dem Erwartungswert von C aufzulösen. Der erste Schritt

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu^x ((x-z)^\mu C_a(x)) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} = \\ \langle gf^{abc} A_\mu(x)(x-z)^\mu C_b(x) - D_\mu^{ab}[A](x) J_b^\mu(x) \\ + ig\bar{\eta}(x)t^a\psi(x) - ig\bar{\psi}(x)t^a\eta(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} \end{aligned} \quad (4.85)$$

²⁴Die Tatsache, daß sowohl der Eichfixierungsterm als auch die Quellterme die Eichinvarianz der Wirkung zerstören, ist dabei ohne Belang. Man braucht ja nur nach der Eichtransformation die neuen Felder wieder umzubenennen, um den alten Ausdruck zu reproduzieren. Von Bedeutung ist lediglich, daß das Maß $\mathcal{D}A$ eichinvariant ist.

scheint nicht zum Ziel zu führen, weil C auch auf der rechten Seite der Gleichung steht. Allerdings kann man diesen Term mit Hilfe der Eichbedingung umschreiben. Letztere ergibt sich bei Anwesenheit der Quelle K aus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{W_z^0} \int \mathcal{D}[A, C, \psi, \bar{\psi}] \frac{\delta}{\delta C^a(x)} \exp(iS_z[A, C, \psi, \bar{\psi}, J, K, \eta, \bar{\eta}]) \\ &= \langle (x-z)_\mu A_a^\mu(x) + K_a(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Durch n -maliges Differenzieren nach J und anschließendes Nullsetzen aller äußeren Quellen ergibt sich daraus wieder die erwartete Eichbedingung für n -Punkt-Funktionen, die nur Eichfelder, d.h. keine Funktionen C , enthalten:

$$(x-z)_\mu \langle A_a^\mu(x) A_{b_1}^{\nu_1}(y_1) \dots A_{b_n}^{\nu_n}(y_n) \rangle_z. \quad (4.87)$$

Differenziert man andererseits (4.86) nach K , so ergibt sich

$$\langle (x-z)_\mu A_a^\mu(x) C_b(y) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} = \langle -K_a(x) C_b(y) + i\delta_{ab}\delta(x-y) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \quad (4.88)$$

Einsetzen dieser Beziehung in (4.85) liefert

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu^x ((x-z)^\mu C_a(x)) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} &= \\ \langle -gf^{abc} K_c(x) C_b(x) - D_\mu^{ab}[A](x) J_b^\mu(x) + ig\bar{\eta}(x)t^a\psi(x) - ig\bar{\psi}(x)t^a\eta(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Nun kommt zwar auch in dieser Gleichung C auf beiden Seiten vor, aber rechts nur in Kombination mit der äußeren Quelle K , wie überhaupt auf der rechten Seite nur Terme mit äußeren Quellen auftreten. Wie wir gleich sehen werden, erlaubt uns das, iterativ Aussagen über Greensche Funktionen zu gewinnen. Zunächst wollen wir die letzte Gleichung aber vollständig nach C auflösen, indem wir den Operator

$$\partial_\mu^x (x-z)^\mu = D + (x-z)^\mu \partial_\mu^x \quad (4.90)$$

invertieren. Wie immer brauchen wir dazu eine geeignete Randbedingung, diesmal für das Lagrange-Multiplikator-Feld C . Da es in der Lagrange-Dichte in Kombination mit dem Eichfeld auftritt und letzteres bei Null wohldefiniert ist, im Unendlichen dagegen nur schwach abfällt (vgl. dazu die Diskussion im letzten Abschnitt), fordern wir nun umgekehrt für C , daß es im Unendlichen verschwindet. Das sollte einen überall wohldefinierten Ausdruck $C^a(x)(x-z)_\mu A_a^\mu(x)$ und damit einen wohldefinierten Wirkungsanteil liefern. Tatsächlich erhält man Inkonsistenzen im Formalismus, wenn man eine andere Randbedingung wählt, worauf wir bei der Besprechung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den radialen Eichfeld-Propagator zurückkommen werden. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß

$$\Delta_z(x, y) = - \int_1^\infty ds s^{D-1} \delta(s(x-z) - (y-z)) \quad (4.91)$$

die gesuchte Greensche Funktion ist:

$$\begin{aligned}
(D + (x - z)^\mu \partial_\mu^x) \Delta_z(x, y) &= - \int_1^\infty ds s^{D-1} (D + (x - z)^\mu \partial_\mu^x) \delta(s(x - z) - (y - z)) \\
&= - \int_1^\infty ds s^{D-1} (D + s \partial_s) \delta(s(x - z) - (y - z)) \\
&= \delta(x - y).
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Daß $\Delta_z(x, y)$ für $x \rightarrow \infty$ bei endlichem y verschwindet, ist auch offensichtlich, da $s(x - z)$ dann nie mit $y - z$ zusammenfallen kann. Damit ergibt sich aus (4.89) die Relation

$$\begin{aligned}
\langle C_a(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} &= \tag{4.93} \\
\int d^D x' \Delta_z(x, x') \langle -g f^{abc} K_c(x') C_b(x') - D_\mu^{ab}[A](x') J_b^\mu(x') \\
&\quad + i g \bar{\eta}(x') t^a \psi(x') - i g \bar{\psi}(x') t^a \eta(x') \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}.
\end{aligned}$$

Wir beschränken uns nun darauf, Slavnov-Taylor-Identitäten für Ein- und Zwei-Punkt-Funktionen abzuleiten. Dabei wird aber klar werden, wie man für beliebige Greensche Funktionen Identitäten bekommt. Zunächst setzen wir alle Quellen auf Null und erhalten

$$\langle C_a(x) \rangle_z = 0. \tag{4.94}$$

Das ist natürlich für sich allein betrachtet nicht weiter bemerkenswert. Ableiten von (4.93) nach $K^b(y)$ und anschließendes Nullsetzen der Quellen liefert aber eben unter Verwendung der letzten Gleichung²⁵

$$\langle C_a(x) C_b(y) \rangle_z = \int d^D x' \Delta_z(x, x') \langle i g f^{acb} \delta(x' - y) C_c(x') \rangle_z = 0. \tag{4.95}$$

Daraus folgt iterativ, daß alle n -Punkt-Funktionen, die nur C -Felder enthalten, verschwinden. Um den Wert solcher Slavnov-Taylor-Identitäten zu ermessen, sollten wir uns in Erinnerung rufen, daß das eine Aussage über *volle* Greensche Funktionen ist, also unter vollständiger Einbeziehung der Farbwechselwirkung.

Schließlich differenzieren wir (4.93) nach $J_\nu^b(y)$:

$$\langle C_a(x) A_b^\nu(y) \rangle_z = \int d^D x' \Delta_z(x, x') \langle i D_{ab}^\nu[A](x') \delta(x' - y) \rangle_z. \tag{4.96}$$

Für den Fall verschwindender Hintergrundfelder,

$$\langle A_\mu^a \rangle_z = 0, \tag{4.97}$$

²⁵Genau genommen wird nach $iK^b(y)$ differenziert.

ergibt sich daraus, daß die gemischte Zwei-Punkt-Funktion unabhängig von der Kopplungskonstanten ist:

$$\langle C_a(x)A_b^\nu(y) \rangle_z = -i\delta_{ab}\partial_y^\nu\Delta_z(x,y) = \langle C_a(x)A_b^\nu(y) \rangle_z^0. \quad (4.98)$$

Die Aussagen (4.95) und (4.98) über die Zwei-Punkt-Funktionen geben Aufschluß über gewisse Eigenschaften der Selbstenergie. Dazu formulieren wir die Dyson-Schwinger-Gleichung [4] für das Set von Zwei-Punkt-Funktionen $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ und $\langle CA_\nu \rangle$. Während im Raum der Eichfelder der Differentialoperator der freien Wirkung

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}\square_x - \partial_x^\mu\partial_x^\nu \quad (4.99)$$

wegen der Eichinvarianz der Theorie nicht invertierbar ist [7], sind in dem größeren, aus A_μ und C bestehenden Raum alle Operatoren umkehrbar — die Konsequenz aus der vollständigen Eichfixierung. Wir bezeichnen Propagator und Selbstenergie in dem größeren Raum mit

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\Theta\Phi}^{ab}(x,y) &:= \begin{pmatrix} \langle A_\mu^a(x)A_\nu^b(y) \rangle_z & \langle A_\mu^a(x)C^b(y) \rangle_z \\ \langle C^a(x)A_\nu^b(y) \rangle_z & \langle C^a(x)C^b(y) \rangle_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_{\mu\nu}^{ab}(x,y)_z & \langle A_\mu^a(x)C^b(y) \rangle_z \\ \langle C^a(x)A_\nu^b(y) \rangle_z & \langle C^a(x)C^b(y) \rangle_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.100)$$

bzw. $\bar{\Pi}_{\Theta\Phi}^{ab}(x,y)$. Dabei laufen die großen griechischen Buchstaben von 0 bis 4. Für die Werte 0 bis 3 stehen sie für die Lorentz-Indizes der Eichfelder, für den Wert 4 für das zusätzliche Lagrange-Multiplikator-Feld.

Die Dyson-Schwinger-Gleichung ergibt sich dann zu

$$\bar{D} = \bar{D}_0 + \bar{D}_0\bar{\Pi}\bar{D}, \quad (4.101)$$

wobei die Multiplikation hier als Summation über alle Indizes und Integration über die Ortsvariablen zu verstehen ist; also ist beispielsweise $\bar{\Pi}\bar{D}$ die Kurzform von

$$\sum_{\Xi=0}^4 \sum_{b=1}^{N^2-1} \int d^Dx \bar{\Pi}_{\Theta\Xi}^{ab}(w,x) \bar{D}_{bc}^{\Xi\Phi}(x,y). \quad (4.102)$$

\bar{D}_0 ist der freie Anteil von \bar{D} . Das Inverse dazu ist der Operator in der freien Wirkung (vgl. (4.99)):

$$\left(\bar{D}_0^{-1}\right)_{\Theta\Phi}^{ab}(x,y) = -i\delta^{ab} \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{\mu\nu}(x) & (x-z)_\mu \\ (x-z)_\nu & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \quad (4.103)$$

Etwas umgeschrieben bekommt die Dyson-Schwinger-Gleichung (4.101) die Gestalt

$$\bar{\Pi} = \bar{D}_0^{-1}(\bar{D} - \bar{D}_0)\bar{D}^{-1}, \quad (4.104)$$

und jetzt kommen die Slavnov-Taylor-Identitäten (4.95), (4.98) ins Spiel:

$$\bar{D} - \bar{D}_0 = \begin{pmatrix} D - D^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.105)$$

folglich:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= -i \begin{pmatrix} \mathcal{O} & x - z \\ x - z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D - D^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{D}^{-1} \\ &= -i \begin{pmatrix} \mathcal{O}(D - D^0) & 0 \\ (x - z)(D - D^0) & 0 \end{pmatrix} \bar{D}^{-1} = -i \begin{pmatrix} \mathcal{O}(D - D^0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{D}^{-1} \\ &= -i \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Dabei haben wir in der zweiten Zeile von der Eichbedingung (4.87) Gebrauch gemacht. Die Sterne stehen für beliebige Einträge. Da die Selbstenergie genau wie die Zwei-Punkt-Funktionen unter gleichzeitigem Austausch aller Variablen symmetrisch ist, ergibt sich, daß die Selbstenergie nur im Eichfeld-Sektor nicht verschwindet:

$$\bar{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.107)$$

Zudem erhalten wir durch Linksmultiplikation der Gleichung (4.106) mit dem Vektor $(\partial_\mu, 0)$ die Transversalität der Gluon-Selbstenergie,

$$(\partial\Pi, 0) = (\partial, 0)(-i) \begin{pmatrix} \mathcal{O}(D - D^0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{D}^{-1} = (0, 0), \quad (4.108)$$

da der in (4.99) definierte Operator natürlich transversal ist: $\partial\mathcal{O} = 0$. Diese exakte Aussage läßt sich störungstheoretisch überprüfen. Wir werden dazu den g^2 -Anteil der Gluon-Selbstenergie berechnen und dadurch einen weiteren Test für unsere radialen Feynman-Regeln durchführen.

Zuvor wollen wir allerdings noch die Dyson-Schwinger-Gleichung für die Gluonenfelder allein angeben, d.h. ohne das schmückende Beiwerk des Lagrange-Multiplikator-Feldes. Dazu betrachten wir die $\mu\nu$ -Komponenten der Gleichung

$$\bar{D}_0^{-1} \bar{D} = \mathbf{1} + \bar{\Pi} \bar{D}, \quad (4.109)$$

also

$$\begin{aligned} &-i(\mathcal{O}_{\mu\alpha}(x)D_{ab}^{\alpha\nu}(x, y)_z + (x - z)_\mu \langle C_a(x)A_b^\nu(y) \rangle_z) \\ &= g_\mu{}^\nu \delta_{ab} \delta(x - y) + \int d^D x' \Pi_{\mu\alpha}^{ac}(x, x')_z D_{cb}^{\alpha\nu}(x', y)_z. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Da wir den gemischten Propagator explizit angeben können (4.98), ergibt sich

$$(g_{\mu\alpha}\square_x - \partial_\mu^x \partial_\alpha^x) D_{ab}^{\alpha\nu}(x, y)_z = \quad (4.111)$$

$$i\delta_{ab} \left(g_\mu{}^\nu \delta(x - y) + (x - z)_\mu \partial_y^\nu \Delta_z(x, y) \right) + i \int d^D x' \Pi_{\mu\alpha}^{ac}(x, x')_z D_{cb}^{\alpha\nu}(x', y)_z.$$

Nun können wir überprüfen, ob wir bei der Bestimmung von Δ_z die richtige Randbedingung gewählt haben. Für den Fall verschwindender Kopplungskonstante ergibt sich unter Verwendung des freien radialen Propagators²⁶

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_z^0 = \quad (4.112)$$

$$\delta^{ab} \left(g_{\mu\nu} \Delta_S(x - y) - \partial_\mu^x \int_0^1 ds (x - z)_\nu \Delta_S(s(x - z) - (y - z)) \right.$$

$$\left. - \partial_\nu^y \int_0^1 dt (y - z)_\mu \Delta_S((x - z) - t(y - z)) \right.$$

$$\left. + \partial_\mu^x \partial_\nu^y \int_0^1 ds \int_0^1 dt (x - z) \cdot (y - z) \Delta_S(s(x - z) - t(y - z)) \right)$$

nach etwas Algebra für die linke Seite von (4.111) der Ausdruck

$$i\delta_{ab} \left(g_\mu{}^\nu \delta(x - y) - \partial_\nu^y \int_0^1 dt (y - z)_\mu \delta((x - z) - t(y - z)) \right), \quad (4.113)$$

während auf der rechten Seite die Selbstenergie verschwindet, und man mit (4.91) die folgenden Terme erhält:

$$i\delta_{ab} \left(g_\mu{}^\nu \delta(x - y) - (x - z)_\mu \partial_y^\nu \int_1^\infty ds s^{D-1} \delta(s(x - z) - (y - z)) \right). \quad (4.114)$$

Das sieht zunächst ungleich aus, läßt sich aber durch die Substitution $s = 1/t$ problemlos ineinander überführen. Hätten wir bei der Bestimmung von Δ_z eine andere Randbedingung für das Feld C gewählt, so würde sich an dieser Stelle eine Inkonsistenz zur Randbedingung an die A -Felder ergeben. Die Randbedingung $C(z) = 0$ etwa würde auf den Ausdruck

$$\Delta'_z(x, y) = \int_0^1 ds s^{D-1} \delta(s(x - z) - (y - z)) \quad (4.115)$$

an Stelle von (4.91) führen. (4.114) würde durch

$$i\delta_{ab} \left(g_\mu{}^\nu \delta(x - y) + (x - z)_\mu \partial_y^\nu \int_0^1 ds s^{D-1} \delta(s(x - z) - (y - z)) \right) \quad (4.116)$$

²⁶Hier für beliebiges z , Δ_S bezeichnet den skalaren Propagator, vgl. Anhang C.

ersetzt, was nicht mehr mit (4.113) identisch wäre. (4.116) ist aber mit einem Propagator verträglich, den man aus der modifizierten Feldstärkeformel (4.52) anstatt aus der von uns verwendeten (4.24) gewinnt. Dieser fällt im Unendlichen schneller ab als unser Propagator, ist aber bei z nicht wohldefiniert (abgesehen von der Tatsache, daß auch er im vierdimensionalen Raum singulär ist). Das reguläre Verhalten von A bei z erzwingt also das reguläre Verhalten von C im Unendlichen und umgekehrt. Genau dadurch wird aber, wie schon erwähnt, der Ausdruck $C^a(x)(x-z)_\mu A_a^\mu(x)$ überall wohldefiniert.

Wir wollen noch die Transversalität der Selbstenergie

$$\partial_\mu^x \Pi^{\mu\nu}(x, y) = 0 \quad (4.117)$$

störungstheoretisch überprüfen. Für den g^2 -Beitrag läßt sich das mit den Rechenricks aus dem letzten Abschnitt ganz leicht auf graphische Weise erledigen. Da die Geistfelder entkoppeln, gibt es nur zwei Diagramme, die in dieser Ordnung beitragen (Abb. 16). Nutzt man aus, daß der erste Graph symmetrisch ist unter Austausch von oberer und unterer Linie, so ergibt sich mit Hilfe der Rechenregel aus Abb. 4 die zweite Zeile in Abb. 16. Wegen der Relation aus Abb. 15 heben sich die beiden letzten Diagramme gegenseitig auf. Das übriggebliebene G -haltige Diagramm ist aber für sich genommen Null, da hier am linken Vertex Geist G und radialer Propagator D kontrahiert werden:

$$\int d^D y G_\nu^{abc}(x, y) D_{cc'}^{\nu\nu'}(y, y') \sim y_\nu D_{cc'}^{\nu\lambda}(y, y') = 0. \quad (4.118)$$

Das zeigt — zumindest in Ordnung g^2 —, daß man in radialer Eichung keine Geister braucht, um die Slavnov-Taylor-Identität zu reproduzieren.²⁷

Bevor wir im nächsten Kapitel auf den Nutzen unserer bisherigen Ergebnisse bei der Formulierung einer Transporttheorie für farbwechselwirkende Teilchen eingehen, möchten wir noch einen Ausblick darauf geben, was die nächsten Schritte bei der Untersuchung quantisierter radial geeichter Felder wären, was aber den (Zeit-)Rahmen dieser Arbeit sprengen würde:

In diesem Abschnitt sind wir vom Euklidischen wieder in den Minkowski-Raum übergewechselt. Der Grund dafür ist ein rein praktischer; die hier erhaltenen Relationen werden im nächsten Kapitel für die Transporttheorie von Quarks und Gluonen weiterverwendet, und dort brauchen wir sie im Minkowski-Raum, da man sich in der kinetischen Theorie in erster Linie für dynamische Größen interessiert. Dazu müssen wir uns aber überlegen, inwieweit sich die im Euklidischen Raum definierten Größen, insbesondere der freie Propagator (4.31), problemlos in den Minkowski-Raum übertragen lassen. Offenbar entstehen hier Pole ja nicht

²⁷Bei der entsprechenden Rechnung in kovarianter Eichung sieht man, daß man dort Geister braucht, um die exakte Slavnov-Taylor-Identität in Ordnung g^2 zu reproduzieren [12].

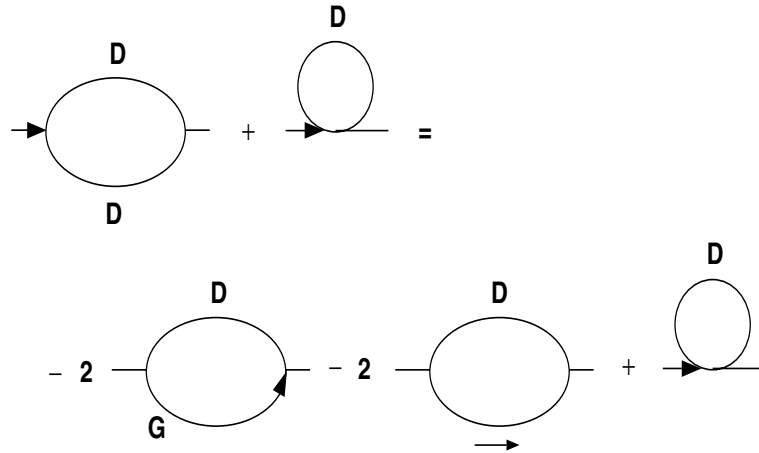


Abbildung 16: Überprüfung der Transversalität der Selbstenergie.

nur dann, wenn der effektive Abstand $sx - ty$ in

$$\frac{1}{[(sx - ty)^2]^{D/2-1}} \tag{4.119}$$

verschwindet, sondern auch wenn $sx - ty$ auf dem Lichtkegel liegt, d.h. für $(sx - ty)^2 = 0$. Tatsächlich äußern sich auch diese zusätzlichen Divergenzen in den zugehörigen Wilson-Loops. Liegt ein Teil der Kontur eines Wilson-Loops auf dem Lichtkegel, so sind nicht nur Kopplungskonstante und *cusp*-Divergenzen renormierungsbedürftig, sondern auch sogenannte Lichtkegel-Singularitäten [75]. Auch diese schlagen auf unseren Propagator durch, genauso wie die *cusp*-Divergenzen, mit denen wir uns hier beschäftigt haben. Insofern kann man auch diese neuen Singularitäten des Propagators verstehen und behandeln. Sie werden z.B. in dimensionaler Regularisierung gleich mitregularisiert, und solange man in den Zwischenschritten der Rechnung $D \neq 4$ läßt, machen sie keine Probleme.

Um ein vollständiges Regelwerk für die Störungstheorie in radialer Eichung anzugeben, ist die (vollständige) Bestimmung der Bauteile, d.h. der Propagatoren und Vertizes, nur der erster Schritt. Als nächstes muß die Renormierbarkeit der Theorie durch Angabe von Countertermen sichergestellt werden. Die Formulierung der Slavnov-Taylor-Identitäten ist dazu eine wichtige Voraussetzung (vgl. dazu [20] und dortige Referenzen). Zudem erwarten wir, daß auch die enge Verbindung zu Wilson-Loops Aussagen über Renormierungseigenschaften von Selbstenergien etc. beisteuert.

Man mag sich fragen, warum wir uns überhaupt schon mit Anwendungen des Formalismus beschäftigen, wenn solche Fragen noch ungeklärt sind. Um das zu

verstehen, ist eine Einordnung der Fragen und Probleme nötig. Die Transporttheorie, der wir uns im nächsten Kapitel wieder zuwenden wollen, beschäftigt sich mit Mediumeffekten. Zieht man aber von einer beliebigen Meßgröße im Medium ihren Vakuumwert ab, so ergibt sich ein ultraviolett-endliches Resultat. Daher hat sich hier ein sehr pragmatischer Zugang zu den Renormierungsproblemen herausgebildet, auf die man in der Störungstheorie für das Vakuum trifft [8], [9]. Im Prinzip reicht es für das Studium von Mediumeffekten sicherzustellen, daß die Theorie renormierbar ist. Die Details des Renormierungsschemas dagegen sind für die Transporttheorie nicht von Belang. Genauso erwarten wir, daß die Singularität des radialen Propagators nur in seinem Vakuumanteil auftritt. Die Divergenz entsteht zwar hier über die Parameterintegrale und nicht wie die herkömmlichen Ultraviolett-Singularitäten bei Loop-Integralen, aber die Ursache ist eigentlich stets die gleiche, der Pol in $1/(x - y)^2$ bzw. $1/(sx - ty)^2$; vgl. dazu die Ausführungen in Anhang D. Mit der Vorstellung, daß der Mediumanteil des radialen Propagators keine *cusp*-Divergenz besitzt und daß die radiale Eichung renormierbar ist — was wir nicht gezeigt haben, wofür aber einiges spricht — können wir uns mit halbwegs gutem Gewissen der Transporttheorie zuwenden.

Schließlich wäre auch die Behandlung der radialen Eichung im kanonischen Formalismus interessant. Leider ist das nicht so einfach wie im Fall der Coulomb-Eichung (Abschnitt 3.7), weil bei der radialen Eichung die A_0 -Komponente des Eichfeldes in die Eichbedingung einbezogen ist. Dieses Problem hat man natürlich auch bei der kovarianten Eichung. Für diese kann man aber zeigen, daß die Feynman-Regeln, wie man sie z.B. aus dem Pfadintegral-Formalismus gewinnt, konsistent sind mit der in Abschnitt 3.6 dargestellten kanonischen Formulierung der Eichtheorie [76]. Möglicherweise kann die radiale Eichung auf ähnliche Weise in der Operator-Sprache dargestellt werden.

and now for something completely different
Monty Python, Flying Circus

5 Transporttheorie in radialer Eichung

Nach diesem Ausflug ins Reich der zahllosen Eichungen kommen wir wieder zur Transporttheorie für Quarks und Gluonen zurück. Mit dem bis jetzt erarbeiteten Formalismus ist es möglich, Dyson-Schwinger-Gleichungen für fermionische und gluonische Zwei-Punkt-Funktionen in radialer Eichung zu formulieren. Formal haben diese Gleichungen die Form

$$(i \not{\partial}_x - m)G(x, y)_z = i\delta(x - y) + i \int d^4x' \Sigma(x, x')_z G(x', y)_z \quad (5.1)$$

und²⁸

$$(g^{\lambda\mu} \square_x - \partial_x^\lambda \partial_x^\mu) D_{\mu\nu}^{ac}(x, y)_z = \quad (5.2)$$

$$i\delta^{ac} \left(g^\lambda{}_\nu \delta(x - y) + (x - z)_\lambda \partial_y^\nu \Delta_z(x, y) \right) + i \int d^4x' \Pi_{ab}^{\lambda\mu}(x, x')_z D_{\mu\nu}^{bc}(x', y)_z .$$

Dabei ist z der Eichpunkt, und es ist offensichtlich, daß alle in dieser Eichung $(x - z)_\mu A^\mu(x) = 0$ berechneten Größen von z abhängen. Mit einem geeigneten, z.B. störungstheoretisch motivierten Ansatz [9], der es erlaubt, die Selbstenergien in Abhängigkeit von den Zwei-Punkt-Funktionen darzustellen, erhält man ein geschlossenes System von Gleichungen, aus denen sich zumindest im Prinzip G_z und D_z bestimmen lassen. Praktisch ist das i.a. unmöglich, weshalb man auf weitere Näherungsverfahren zurückgreifen muß. Wie in Kapitel 2 dargestellt, ist eine für Transportphänomene geeignete Vereinfachung die Gradientenentwicklung. An Stelle obiger Funktionen benutzt man hier die Wigner-transformierten Phasenraum-Funktionen

$$\tilde{G}(X, k)_z := \int d^4u e^{iku} G(X + u/2, X - u/2)_z, \quad (5.3)$$

$$\tilde{\Sigma}(X, k)_z := \int d^4u e^{iku} \Sigma(X + u/2, X - u/2)_z, \quad (5.4)$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{ab}(X, k)_z := \int d^4u e^{iku} D_{\mu\nu}^{ab}(X + u/2, X - u/2)_z \quad (5.5)$$

und

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{ab}(X, k)_z := \int d^4u e^{iku} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(X + u/2, X - u/2)_z. \quad (5.6)$$

²⁸Diese Gleichung ist aus dem letzten Kapitel übernommen (4.111) und hier nur der Übersichtlichkeit halber noch einmal wiedergegeben.

Die Zwei-Punkt-Funktionen können als eichkovariante Funktionen interpretiert werden, die in radialer Eichung ausgewertet wurden:

$$G(x, y)_z = \langle U[A](z, x)\psi(x)\bar{\psi}(y)U[A](y, z) \rangle \Big|_{(x-z)_\mu A^\mu(x)=0} \quad (5.7)$$

und

$$D_{\mu\nu}(x, y)_z = \langle {}^{U[A](z,x)}A_\mu(x) {}^{U[A](z,y)}A_\nu(y) \rangle \Big|_{(x-z)_\mu A^\mu(x)=0} . \quad (5.8)$$

Insofern sind die Gleichungen (5.1) und (5.2) schon ein beachtliches Ergebnis, zumal man ansonsten nicht weiß, wie man Bewegungsgleichungen für Objekte formulieren soll, bei denen in jeder Ordnung der Kopplungskonstante neue n -Punkt-Funktionen hinzukommen.

Allerdings sind die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke nicht ganz diejenigen, für die wir uns interessieren. Die kovarianten Wigner-Funktionen, die in der Quantenphysik der Eichfelder die Analoga zu klassischen Phasenraum-Verteilungsfunktionen darstellen, sind nicht mit einem konstanten Punkt z als Endpunkt der Paralleltransport-Operatoren definiert, sondern mit der Schwerpunktskoordinate $X(x+y)/2$ der Wigner-Funktion; z.B. für Fermionen:

$$\tilde{G}(X, k) = \tilde{G}(X, k)_{z=X} . \quad (5.9)$$

An dieser Stelle kann man zwei verschiedene Standpunkte einnehmen, wie sinnvollerweise weiter zu verfahren ist:

Erstens kann man daran denken, z zunächst als Konstante zu behandeln und die Gleichungen (5.1) und (5.2) durch Gradientenentwicklung in Transportgleichungen überzuführen. Durch Lösen der Transportgleichungen für beliebiges, aber festes z erhält man die Lösungsmenge $\tilde{G}(X, k)_z$ und $\tilde{D}(X, k)_z$ mit beliebigen Werten für X , k und z . Von all diesen Lösungen interessiert man sich dann nur für diejenigen mit $z = X$.

Zweitens kann man weiter nach Gleichungen suchen, die nur die Wigner-Funktionen beinhalten, für die man sich eigentlich interessiert. Dazu sind (5.1) und (5.2) sicher wichtige Bauteile, aber eben noch nicht alles.

Verfolgen wir zunächst den ersten Weg weiter: Damit eine Gradientenentwicklung sinnvoll ist, dürfen die betrachteten Zwei-Punkt-Funktionen und Selbstenergien nur schwach, d.h. auf großen Skalen im Phasenraum variieren. Bei eichinvarianten Größen ist das eine Aussage darüber, welche physikalischen Systeme mit Hilfe von Transportgleichungen beschrieben werden können und welche nicht. Die Größen, mit denen wir das physikalische System beschreiben wollen, sind aber nicht eichinvariant, weshalb wir nicht nur eine Bedingung an die physikalische Situation erhalten, sondern auch an die Eichwahl. Wir müssen uns also die Frage

stellen, inwiefern die gewählte Eichung, hier die radiale, mit einer Gradientenentwicklung verträglich ist. Betrachten wir dazu als Musterbeispiel das Vakuum. Alle eichinvarianten Phasenraum-Funktionen sind wegen der Translationsinvarianz des Vakuums völlig unabhängig von den Ortskoordinaten. Insofern erfüllt das betrachtete System eine der Voraussetzungen für die Gültigkeit der Gradientenentwicklung: Es variiert nur schwach (nämlich gar nicht) im Ortsraum. Wählt man nun eine Eichung, die ebenfalls translationsinvariant ist, so erfüllen alle, auch die eichabhängigen Funktionen diese Grundvoraussetzung.

Für die gluonische Zwei-Punkt-Funktion in radialer Eichung gilt das aber leider nicht. Da die Eichbedingung die Translationsinvarianz explizit bricht, gibt es keinen Grund zu erwarten, daß die Zwei-Punkt-Funktion homogen in der Schwerpunktkoordinate ist. Bei verschwindender Kopplung läßt sich das natürlich leicht nachprüfen. Für die freie Zwei-Punkt-Funktion (4.112) ergibt sich

$$\partial_\alpha^X D_{\mu\nu}^{0ab}(X + u/2, X - u/2)_z \neq 0. \quad (5.10)$$

Die partielle Ableitung des freien radialen Propagators hat offensichtlich eine sehr reichhaltige Lorentz-Struktur. Wir verzichten darauf, den vollen Ausdruck anzugeben, und beschränken uns stattdessen exemplarisch auf den $g_{\mu\alpha}u_\nu$ -Term. Dessen Koeffizient K ist gegeben durch

$$K = \frac{2^{2-D}}{4-D} \int_{-1}^1 d\beta (1 + |\beta|)^{D-3} (1 - |\beta|) \times \left[g_1(\beta) + \left(\left(\beta(X - z) + \frac{u}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}(1 - \beta^2)(X - z) \cdot u \right) g_2(\beta) \right] \quad (5.11)$$

mit

$$g_1(\beta) = \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} (1 - D/2) \left[\left(\beta(X - z) + \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{-D/2} \quad (5.12)$$

und

$$g_2(\beta) = \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} (1 - D/2)(-D/2) \left[\left(\beta(X - z) + \frac{u}{2} \right)^2 \right]^{-1-D/2}. \quad (5.13)$$

In Abb. 17 ist K gegen $d := \sqrt{(X - z)^2}$ für $D = 3$ aufgetragen (durchgezogene Linie). Die gestrichelte Linie zeigt $(4 - D)K$ für $D \rightarrow 4$. Alle Größen sind in Einheiten von $\sqrt{u^2}$ angegeben.²⁹ Die Richtung von $X - z$ wurde senkrecht zu u gewählt.

²⁹Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Bereich des Minkowski-Raumes, in dem gilt: $(X - z)^2, u^2 > 0$.

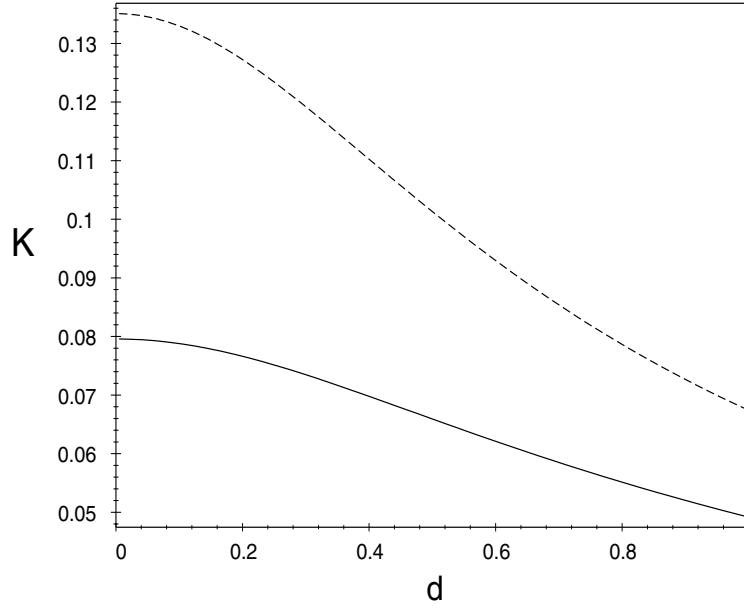


Abbildung 17: K in Abhängigkeit von d für $D = 3$ (durchgezogene Linie) sowie der divergente Anteil von K für $D = 4$ (gestrichelte Linie).

Die Graphen zeigen, daß der Wert von $\partial_\alpha^X D_{\mu\nu}^0(X + u/2, X - u/2)_z$ davon abhängt, wie weit X von z entfernt ist. Insbesondere ergibt sich selbst dann nicht Null, wenn Eich- und Schwerpunkt zusammenfallen.

Aus diesen Überlegungen heraus erscheint eine Gradientenentwicklung der Dyson-Schwinger-Gleichungen (5.1) und (5.2) nicht sinnvoll, da die dabei auftretenden Gradiententerme, z.B.

$$\frac{1}{2} \left(\partial_X^\alpha \tilde{\Pi}_{ab}^{\lambda\mu}(X, k)_z \partial_\alpha^k \tilde{D}_{\mu\nu}^{bc}(X, k)_z - \partial_k^\alpha \tilde{\Pi}_{ab}^{\lambda\mu}(X, k)_z \partial_\alpha^X \tilde{D}_{\mu\nu}^{bc}(X, k)_z \right) \quad (5.14)$$

nicht stets klein sind gegen

$$\tilde{\Pi}_{ab}^{\lambda\mu}(X, k)_z \tilde{D}_{\mu\nu}^{bc}(X, k)_z, \quad (5.15)$$

sondern von der Differenz $X - z$ bestimmt sind.

Man kann die ganze Sache auch unter einem etwas anderen Blickwinkel sehen, indem man an Stelle der in radialer Eichung gegebenen Zwei-Punkt-Funktionen $D(x, y)_z$ und $G(x, y)_z$ die eichkovarianten Funktionen

$$\int d^4u e^{iku} \langle U[A](z, X + u/2) \psi(X + u/2) \bar{\psi}(X - u/2) U[A](X - u/2, z) \rangle \quad (5.16)$$

und

$$\int d^4u e^{iku} \langle U[A](z, X+u/2) A_\mu(X+u/2) U[A](z, X-u/2) A_\nu(X-u/2) \rangle \quad (5.17)$$

betrachtet, von denen erstere ja nur spezielle Repräsentationen darstellen. Bei festem Bezugspunkt z sind auch letztere vom Schwerpunkt X abhängig, selbst wenn das physikalische System, das sie beschreiben — etwa das Vakuum —, translationsinvariant ist. Nur für die Wahl $z = X$, wenn diese Funktionen also in die Wigner-Funktionen übergehen, kann man erwarten, daß man X -unabhängige Ausdrücke erhält, wenn das System Translationsinvarianz besitzt. Auch das läßt sich für den freien radialen Propagator (4.112) nachprüfen. Eine ziemlich lange, aber im Prinzip unkomplizierte Rechnung zeigt:³⁰

$$\begin{aligned} \partial_X^\alpha \left[D_{\mu\nu}^{0ab}(X+u/2, X-u/2)_{z=X} \right] = & \quad (5.18) \\ \left[\partial_X^\alpha D_{\mu\nu}^{0ab}(X+u/2, X-u/2)_z + \partial_z^\alpha D_{\mu\nu}^{0ab}(X+u/2, X-u/2)_z \right]_{z=X} = 0. \end{aligned}$$

Die Dyson-Schwinger-Gleichungen (5.1) und (5.2) für festen Eichpunkt z eignen sich also nicht für eine Gradientenentwicklung. Dies äußert sich physikalisch auch darin, daß man bei einem solchen Zugang in führender Ordnung der Gradientenentwicklung nur die Hälfte des Vlasov-Terms in der Transportgleichung erhält [77]. Von den beiden in Anschluß an (5.9) angegebenen Varianten scheidet damit die erste aus. Wir müssen also nach Gleichungen suchen, die nur Funktionen enthalten, bei denen Eichpunkt z und Schwerpunkt zusammenfallen, die also z.B. Ausdrücke wie

$$\int d^4x' \Sigma(x, x')_{z=(x+x')/2} G(x', y)_{z=(x'+y)/2} \quad (5.19)$$

an Stelle von

$$\int d^4x' \Sigma(x, x')_z G(x', y)_z \quad (5.20)$$

enthalten. Wie man dieser etwas vagen Formulierung anmerkt, gibt es diese Gleichungen noch nicht. Wir möchten aber noch ein paar Bauteile dazu zur Verfügung stellen.

Offenbar muß an die Stelle des festen Eichpunktes z eine Variable treten, die verschiedene Werte annehmen kann, insbesondere die der vorkommenden dynamischen Variablen. Das sieht man auch schon in (5.18). Während der erste Term in der zweiten Zeile etwas mit der Dynamik der Zwei-Punkt-Funktion bei festgehaltenem Eichpunkt z zu tun hat, betrachtet man beim zweiten Term, wie sich

³⁰Anstatt die Aufteilung in Schwer- und Eichpunkt zu machen, kann man auch gleich $z = X$ in (4.112) einsetzen — mit $x = X + u/2$, $y = X - u/2$. Da dort nur Differenzen $x - z$ und $y - z$ auftauchen, diese aber für $z = X$ in $\pm u/2$ übergehen, ergibt sich das Ergebnis (5.18) auch ohne Rechnung. Wie sich gleich herausstellen wird, ist die getrennte Variation nach Eich- und Schwerpunkt aber anschaulicher.

der Propagator verändert, wenn man an der Eichung „dreht“. Die Dynamik für festgehaltenes z ist durch die Dyson-Schwinger-Gleichungen gegeben. Was wir also noch brauchen, sind Gleichungen, die die Variation nach z beschreiben. Wir möchten also wissen, wie sich die Greenschen Funktionen der radialen Eichung verändern, wenn man sie durch eine infinitesimale Eichtransformation von der Eichung $(x-z)_\mu A^\mu(x) = 0$ in die Eichung $(x-z-\delta z)_\mu A^\mu(x) = 0$ überführt. Da die Slavnov-Taylor-Identitäten die Eichinvarianz der Theorie auf dem Level der Greenschen Funktionen widerspiegeln, erwarten wir, daß sie hierbei von Nutzen sind.

Wir werden nun

$$\partial_z^\alpha \frac{W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}]}{W_z^0} = \frac{\partial_z^\alpha W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}]}{W_z^0} - \frac{W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}]}{W_z^0} \frac{\partial_z^\alpha W_z^0}{W_z^0} \quad (5.21)$$

berechnen, da sich daraus durch Ableiten nach den Quellen die Variation einer beliebigen Greenschen Funktion nach dem Eichparameter z ergibt (vgl. (4.75)). Zunächst erhalten wir

$$\frac{\partial_z^\alpha W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}]}{W_z^0} = -i \int d^4x \langle C^a(x) A_a^\alpha(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \quad (5.22)$$

Wie wir in Abschnitt 4.5 gesehen haben, betreffen die Slavnov-Taylor-Identitäten gerade die C -haltigen Greenschen Funktionen, und eine solche haben wir hier vor uns. Differentiation von (4.93) nach $iJ_\alpha^a(x)$ liefert

$$\begin{aligned} \langle C_a(x) A_a^\alpha(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}} = & \quad (5.23) \\ & \int d^4x' \Delta_z(x, x') \langle -g f^{abc} K_c(x') C_b(x') A_a^\alpha(x) - D_\mu^{ab}[A](x') J_b^\mu(x') A_a^\alpha(x) \\ & - \partial_{x'}^\alpha \delta(x-x') \delta_a^a + ig \bar{\eta}(x') t^a \psi(x') A_a^\alpha(x) - ig \bar{\psi}(x') t^a \eta(x') A_a^\alpha(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in (5.21) ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_z^\alpha \frac{W_z[J, K, \eta, \bar{\eta}]}{W_z^0} = & \quad (5.24) \\ & -i \int d^4x \int d^4x' \Delta_z(x, x') \langle -g f^{abc} K_c(x') C_b(x') A_a^\alpha(x) - D_\mu^{ab}[A](x') J_b^\mu(x') A_a^\alpha(x) \\ & + ig \bar{\eta}(x') t^a \psi(x') A_a^\alpha(x) - ig \bar{\psi}(x') t^a \eta(x') A_a^\alpha(x) \rangle_{z, J, K, \eta, \bar{\eta}}. \end{aligned}$$

Dabei bringt der zweite Term auf der rechten Seite von (5.21) gerade den δ_a^a -Term in (5.23) zum Verschwinden. Aus (5.24) erhalten wir die Variationen der Zwei-Punkt-Funktionen nach dem Eichpunkt z . Zunächst für Fermionen:

$$\begin{aligned} \partial_z^\alpha \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_z & \quad (5.25) \\ = -ig \int d^4y' \left[\Delta_z(y', x) \langle A^\alpha(y') \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_z - \Delta_z(y', y) \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\alpha(y') \rangle_z \right] \\ = ig \int_0^1 dt \frac{1}{t} \left[\langle A^\alpha(z + t(x-z)) \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_z - \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\alpha(z + t(y-z)) \rangle_z \right]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile Δ_z mit (4.91) ausgewertet und die Substitution $s = 1/t$ verwendet.

Auf analoge Weise ergibt sich für die gluonische Zwei-Punkt-Funktion

$$\begin{aligned} \partial_z^\alpha \langle A_a^\mu(x) A_b^\nu(y) \rangle_z = & \quad (5.26) \\ & \int_0^1 dt \frac{1}{t} \left[\partial_x^\mu \langle A_a^\alpha(z + t(x-z)) A_b^\nu(y) \rangle_z + \partial_y^\nu \langle A_a^\mu(x) A_b^\alpha(z + t(y-z)) \rangle_z \right. \\ & + g f_{acd} \langle A_c^\mu(x) A_d^\alpha(z + t(x-z)) A_b^\nu(y) \rangle_z \\ & \left. + g f_{bcd} \langle A_b^\mu(x) A_d^\alpha(z + t(y-z)) A_c^\nu(y) \rangle_z \right]. \end{aligned}$$

Ebenso lassen sich auf diese Art Gleichungen für höhere n -Punkt-Funktionen sowie für höhere Ableitungen nach z gewinnen.

Im Prinzip haben wir also alles, was wir brauchen, in der Hand. Wir kennen die Variationen der Zwei-Punkt-Funktionen nach allen $3(\times 4)$ Parametern x , y und z aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen und den Slavnov-Taylor-Identitäten. Trotzdem ist unklar, ob es möglich ist, daraus einen Satz von Gleichungen zu konstruieren, der nur die Wigner-Funktionen enthält. An Ausdrücken wie (5.19) wird auch das Problem deutlich; Selbstenergie und Propagator werden für zwei verschiedene radiale Eichungen ausgewertet. Es bleibt also festzuhalten, daß wir unser Ziel noch nicht erreicht haben, einen Satz von Dyson-Schwinger-, „artigen“ Gleichungen für die Wigner-Funktionen zu finden, die sich durch Gradientenentwicklung in Transportgleichungen überführen lassen. Trotzdem sind wir diesem Ziel durch die Etablierung der Feynman-Regeln und dem Aufstellen der Slavnov-Taylor-Identitäten für radiale Eichungen mit beliebigem Eichpunkt z schon einen großen Schritt nähergekommen. Alle weiteren Schritte müssen zukünftigen Arbeiten vorbehalten bleiben.

Notwendig ist allerdings noch die Überprüfung, ob unser Formalismus überhaupt konsistent mit anderen Arbeiten ist. Zum Vergleich bietet sich hier der in [2] dargestellte Formalismus für den Quark-Wigner-Operator an. Wir betrachten die dort mit *constraint linear equation* bezeichnete Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\gamma^\mu k_\mu - m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu(X) \right) \hat{W}(X, k) = & \\ \frac{1}{2} i g \partial_k^\nu \gamma^\mu \left(\int_0^1 ds \frac{1}{2} (1+s) [e^{-\frac{1}{2} i s \partial_k \cdot \mathcal{D}(X)} F_{\nu\mu}(X)] \hat{W}(X, k) \right. & \\ \left. + \hat{W}(X, k) \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1-s) [e^{\frac{1}{2} i s \partial_k^\dagger \cdot \mathcal{D}(X)} F_{\nu\mu}(X)] \right), & \quad (5.27) \end{aligned}$$

in der praktisch alle Information über den Wigner-Operator enthalten ist, obwohl man daraus nicht direkt eine Transportgleichung ablesen kann (vgl. dazu

die Ausführungen in Abschnitt 2.1 über den Driftterm). \mathcal{D} bezeichnet hier wieder die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung (3.6); sie wirkt nur innerhalb der eckigen Klammern. Von dieser eichkovarianten Gleichung kann man nun den Erwartungswert bilden und das Ganze in radialer Eichung mit Eichpunkt X auswerten. Aus den kovarianten werden dadurch partielle Ableitungen, die meist nur auf die Feldstärke wirken. Das wird im folgenden durch ∂^F angezeigt. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(\gamma^\mu k_\mu - m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \partial_\mu^X \right) \tilde{G}(X, k)_X = \\ & \frac{1}{2} i g \partial_k^\nu \gamma^\mu \left(\int_0^1 ds \frac{1}{2} (1+s) e^{-\frac{1}{2} i s \partial_k \cdot \partial_X^F} \int d^4 u e^{i k u} \langle F_{\nu\mu}(X) \psi(X+u/2) \bar{\psi}(X-u/2) \rangle_X \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1-s) e^{\frac{1}{2} i s \partial_k \cdot \partial_X^F} \int d^4 u e^{i k u} \langle \psi(X+u/2) \bar{\psi}(X-u/2) F_{\nu\mu}(X) \rangle_X \right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Diese Gleichung ist natürlich nur von begrenztem Nutzen, solange man nicht weiß, wie man die Drei-Punkt-Funktion in Abhängigkeit von der Wigner-Funktion ausdrücken soll. Genau das liefert ja die Dyson-Schwinger-Gleichung, wenn man die Selbstenergie geeignet nähert. Jetzt geht es uns aber nicht um die Lösung obiger Gleichung, sondern darum, ob wir sie mit unserem Formalismus reproduzieren können. Dazu ist es günstig, sie wieder zurück in den Ortsraum zu transformieren:

$$\begin{aligned} & \left(i \gamma^\mu \partial_\mu^u - m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \partial_\mu^X \right) \langle \psi(X+u/2) \bar{\psi}(X-u/2) \rangle_X = \\ & -\frac{1}{2} g u^\nu \gamma^\mu \left(\int_0^1 ds \frac{1}{2} (1+s) \langle F_{\nu\mu}(X+su/2) \psi(X+u/2) \bar{\psi}(X-u/2) \rangle_X \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 ds \frac{1}{2} (1-s) \langle \psi(X+u/2) \bar{\psi}(X-u/2) F_{\nu\mu}(X-su/2) \rangle_X \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Nun zerlegen wir die Ableitung nach X wie in (5.18) in eine Ableitung nach dem Eichpunkt $z = X$ und eine nach der in den Klammern vorkommenden Schwerpunktkoordinate. Zudem setzen wir $x = X + u/2$ und $y = X - u/2$. Mit

$$\partial_x = \partial_u + \frac{1}{2} \partial_X \quad (5.30)$$

ergibt sich

$$\left[\left(i \gamma^\mu \partial_\mu^x - m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \partial_\mu^z \right) \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_z \right]_{z=(x+y)/2} = \quad (5.31)$$

$$-\frac{1}{2}g(x-y)^\nu\gamma^\mu\left(\int_0^1 ds\frac{1}{2}(1+s)\langle F_{\nu\mu}(z+s(x-z))\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{z=(x+y)/2}\right. \\ \left.+\int_0^1 ds\frac{1}{2}(1-s)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)F_{\nu\mu}(z+s(y-z))\rangle_{z=(x+y)/2}\right).$$

Zum Vergleich berechnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit unserem Formalismus. Die Bewegungsgleichung für festes z ist gegeben durch

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z = -g\gamma^\mu\langle A_\mu(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z \\ = -g\gamma^\mu\int_0^1 ds s(x-z)^\nu\langle F_{\nu\mu}(z+s(x-z))\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z. \quad (5.32)$$

Dabei haben wir die Feldstärkeformel für Vektorpotentiale in radialer Eichung verwendet. Für den uns interessierenden Spezialfall $z = (x+y)/2$ erhalten wir

$$\left[(i\gamma^\mu\partial_\mu^x - m)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z\right]_{z=(x+y)/2} = \\ -g\gamma^\mu\int_0^1 ds s\frac{1}{2}(x-y)^\nu\langle F_{\nu\mu}(z+s(x-z))\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_{z=(x+y)/2}. \quad (5.33)$$

Hinzu kommt noch der Beitrag von der Variation nach z . Er ist durch (5.25) gegeben und kann ebenfalls mit Hilfe der Feldstärkeformel weiter ausgewertet werden:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu^z\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z = \quad (5.34) \\ -g\gamma^\mu\int_0^1 dt\frac{1}{t}\left[\int_0^1 ds st(x-z)^\nu\langle F_{\nu\mu}(z+st(x-z))\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle_z\right. \\ \left.-\int_0^1 ds st(y-z)^\nu\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)F_{\nu\mu}(z+st(y-z))\rangle_z\right].$$

Das zweifache Parameterintegral kann mit folgendem Rechenrick ausgewertet werden:

$$\int_0^1 dt\int_0^1 ds sf(st) = \int_0^1 ds\int_0^s du f(u) = \int_0^1 ds\left(\frac{d}{ds}s\right)\int_0^s du f(u) = \\ \int_0^1 du f(u) - \int_0^1 ds sf(s) = \int_0^1 ds(1-s)f(s), \quad (5.35)$$

wobei wir die Substitution $u = st$ verwendet haben. f ist dabei eine beliebige Funktion. Aus (5.34) ergibt sich dann für $z = (x + y)/2$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} & \left[i\gamma^\mu \partial_\mu^z \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_z \right]_{z=(x+y)/2} = \\ & -g\gamma^\mu \left[\int_0^1 ds (1-s) \frac{1}{2} (x-y)^\nu \langle F_{\nu\mu}(z + s(x-z)) \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_{z=(x+y)/2} \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 ds (1-s) \frac{1}{2} (y-x)^\nu \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) F_{\nu\mu}(z + s(y-z)) \rangle_{z=(x+y)/2} \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Gleichungen (5.33) und (5.36) liefern zusammen (5.31),³¹ womit die Konsistenz unserer Gleichungen, insbesondere der Slavnov-Taylor-Identitäten, mit den in [2] entwickelten gezeigt ist.

In diesem Zusammenhang ist die Erkenntnis wichtig, daß die Wahl von Δ_z in (4.91) verantwortlich ist für die richtigen Grenzen des t -Parameterintegrals in (5.34). Hätten wir statt Δ_z etwa Δ'_z aus (4.115) verwendet, wäre es nicht gelungen, (5.31) zu reproduzieren. Die Wahl von Δ_z wiederum ist aber korreliert mit den Parameterintegralen im freien radialen Propagator, welche durch die Randbedingung der Eichfelder beim Eichpunkt bestimmt werden (vgl. dazu die Diskussion nach (4.114)). Das zeigt erneut, wie wichtig die korrekte Implementierung dieser Randbedingung ist, und daß Ansätze, die diese Zusammenhänge ignorieren (vgl. die Diskussion ab (4.52) sowie in [68]), zumindest für die transporttheoretischen Überlegungen ungeeignet sind. Ob auch der in [38] dargestellte Zugang³² zu Inkonsistenzen führt, ist schwerer zu beurteilen, da dort Geistfelder auftreten, die zwangsläufig die Slavnov-Taylor-Identitäten stark verändern. Insofern ist unklar, in welcher Weise (5.34) modifiziert wird.

In jedem Fall ist der hier entwickelte Formalismus konsistent mit dem in [2] dargestellten. Zudem besitzt er einfache Feynman-Regeln, da die Geistfelder entkoppeln, was eine sehr direkte Ableitung der Slavnov-Taylor-Identitäten ermöglicht. Das einzige Problem ist der nur dimensionsregularisierte wohldefinierte Propagator, dessen singuläres Verhalten man aber mit Hilfe der *cusp*-Singularitäten von Wilson-Loops zwanglos erklären kann.

³¹Genauer: (5.33) + $1/2 \times$ (5.36) = (5.31).

³²Wie bereits erwähnt, wird dort der radiale Propagator durch Eichfixierung der rein winkelabhängigen Eichtransformationen von seiner Singularität befreit.

*It's not the ending of the world,
It's only the closing of a discotheque
I used to go three times a week.
But that was a long long time ago.*

David Byrne, A long time ago

6 Schlußbetrachtungen

Machen wir noch einmal einen Schnelldurchlauf durch die vorliegende Arbeit. Um ein Vielteilchensystem farbwechselwirkender Objekte zu beschreiben, das sich (noch) nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, haben wir die Lorentz- und eichkovarianten Wigner-Funktionen für Quarks (2.58) und Gluonen (2.77) (oder alternativ (2.79)) eingeführt. Insbesondere die Quark-Wigner-Funktion wurde dadurch eindeutig festgelegt, daß die dort auftretenden Impulse die kinetischen Impulse darstellen sollen und nicht etwa die eichabhängigen zur Schwerpunktsvariablen kanonisch konjugierten Impulse. Dadurch sind die Wigner-Funktionen in Eichtheorien wesentlich komplizierter als in Modellen ohne Eichfreiheit, wo z.B. eine Nukleon-Wigner-Funktion einfach durch (2.57) gegeben ist.

Als nächstes wurde die Eichfreiheit der Theorie dazu benutzt, um die betrachteten Größen in eine möglichst einfache und dadurch handhabbare Form zu bringen. Hierfür erwies sich die radiale Eichung als hervorragend geeignet. Diese Eichung hat zudem die interessante Eigenschaft, daß sie erlaubt, das Vektorpotential durch die eichkovariante Feldstärke und den Gluon-Propagator durch einen eichinvarianten Wilson-Loop auszudrücken. Der Preis für die strukturelle Einfachheit der Wigner-Funktionen in der radialen Eichung ist die Kompliziertheit ihrer Feynman-Regeln. Die erste unvermeidliche Komplikation ist die Notwendigkeit, alle Loop-Rechnungen im Orts- statt im Impulsraum durchzuführen, da die radiale Eichbedingung die Translationsinvarianz der Theorie bricht. Noch gravierender ist aber, daß die an sich sehr schöne Eigenschaft, den freien Eichfeld-Propagator über Feldstärke- oder Wilson-Loop-Formel ausrechnen zu können, im vierdimensionalen Raum zu einem singulären Ergebnis führt.

Um die richtigen und vollständigen Feynman-Regeln für die radiale Eichung zu finden, wurden zunächst allgemein die Probleme studiert, mit denen man beim Studium nicht-kovarianter Eichungen konfrontiert wird. Der in [38] behandelte Diskussion der Vollständigkeit und Unvollständigkeit von Eichbedingungen wurde in dieser Arbeit der ebenso wichtige Aspekt der Randbedingungen von Eichfeldern hinzugefügt. Das führte auf eine Sichtweise, die der in [38] dargestellten genau entgegengesetzt ist. Während dort die radiale Eichung als unvollständig bezüglich rein winkelabhängiger Eichmoden betrachtet wird, wurde hier gezeigt,

daß das nur für einen Raum gilt, bei dem der Eichpunkt ausgenommen wird. In einem D -dimensionalen Raum ohne „Loch“ dagegen ist die radiale Eichbedingung schon vollständig. Da wir uns bei transporttheoretischen Überlegungen gerade für das Verhalten der Wigner-Funktionen am Eichpunkt interessieren, weil dieser mit der Schwerpunktsvariablen zusammenfällt, darf der Eichpunkt nicht aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden. Damit haben wir uns aber zugleich der Möglichkeit beraubt, das singuläre Verhalten des Propagators durch zusätzliche Eichfixierung der rein winkelabhängigen Eichmoden zu beseitigen.

Die enge Verbindung des radialen Propagators mit einer bestimmten Klasse von Wilson-Loops lieferte aber eine völlig natürliche Erklärung der Propagator-Divergenz: Eine besondere Art von Ultraviolett-Singularität, die bei Wilson-Loops mit Knicken und Kreuzungspunkten ab Ordnung g^2 in der Kopplungskonstanten auftritt — die *cuspl*-Divergenz — äußert sich im radialen Eichfeld-Propagator bereits in der Ordnung g^0 , also im freien Fall. Diese Erklärung legte nahe, die Propagator-Divergenz wie andere Ultraviolett-Singularitäten zu behandeln, d.h. durch Regularisierung. Als ein Schema, das die Eichsymmetrie der Theorie nicht verletzt, bot sich hier die dimensionale Regularisierung an. Da alle Loop-Rechnungen ohnehin (dimensions-)regularisiert durchgeführt werden müssen, ist das keine zusätzliche Verkomplizierung. Unschön ist freilich, daß auch der dimensionsregularisierte freie radiale Propagator eine sehr komplizierte Form besitzt.

Die Angabe des freien Propagators war die letzte Hürde für die Formulierung von Feynman-Regeln in radialer Eichung im D -dimensionalen Raum. Da die radiale Eichung rein algebraisch und zudem vollständig ist, entkoppeln die Faddeev-Popov-Geister von den Eichfeldern und brauchen deshalb nicht berücksichtigt zu werden.

Der nächste Schritt in dieser Arbeit war die Überprüfung der Konsistenz und Vollständigkeit der so entwickelten Feynman-Regeln. Dabei wurde insbesondere ein bisher nur im Impulsraum formuliertes Theorem über die Äquivalenz von Feynman-Regeln verschiedener Eichungen in den Ortsraum übertragen und dadurch für die radiale Eichung anwendbar gemacht. Explizit wurde nachgeprüft, daß die Ergebnisse für Vakuumblasen in Ordnung g^2 und für Wilson-Loops in Ordnung g^4 für radiale und Feynman-Eichung übereinstimmen.

Sodann wurden die Slavnov-Taylor-Identitäten für die radiale Eichung berechnet. Insbesondere ergab sich hier die Transversalität der Selbstenergie. Auch dieses Ergebnis konnte in Ordnung g^2 störungstheoretisch reproduziert werden und bestätigte somit erneut die Vollständigkeit der radialen Feynman-Regeln.

Schließlich sind wir im letzten Kapitel wieder zur Transporttheorie zurückgekehrt. Der bis dahin erarbeitete Formalismus erlaubt die Formulierung von Dyson-Schwinger-Gleichungen in radialer Eichung mit festem Eichpunkt. Leider sind

diese Gleichungen in der Praxis selbst dann schwer zu lösen, wenn man die Selbstenergien näherungsweise über die Zwei-Punkt-Funktionen ausdrückt. Für die Beschreibung von Systemen, die nur auf sehr großen Skalen im Phasenraum variieren, scheint sich zunächst anzubieten, die Gleichungen durch Gradientenentwicklung zu vereinfachen. Wie wir gezeigt haben, ist das aber bei festem, vom Schwerpunkt abweichendem Eichpunkt nicht sinnvoll. Wir folgerten daraus, daß auch der Eichpunkt mit in die Dynamik einbezogen werden muß, d.h. daß man gezwungen ist, zu untersuchen, wie sich die n -Punkt-Funktionen bei Variation des Eichpunktes verändern. Die entsprechenden Gleichungen haben wir aus den Slavnov-Taylor-Identitäten abgeleitet. Zum Schluß überprüften wir die Konsistenz des hier entwickelten Formalismus mit früheren Arbeiten [2] .

Soweit zum bisher Erreichten. Wie bei fast jeder wissenschaftlichen Arbeit so ist auch hier die Liste der neuen Fragen länger als die der beantworteten. Wir haben an mehreren Stellen der Arbeit einen Ausblick auf Unerledigtes gegeben. Auch das wollen wir nun noch einmal zusammentragen.

Was die Vakuumtheorie quantisierter, radial geeichter Felder angeht, so sind wir den Beweis schuldig geblieben, daß diese Theorie auch wirklich renormierbar ist. Zudem von Interesse ist die Untersuchung, wie sich neben den hier behandelten *cusp*-Divergenzen die Lichtkegel-Singularitäten von Wilson-Loops auf den radialen Propagator im Detail auswirken. Schließlich könnte auch die Behandlung der radialen Eichung im kanonischen Formalismus neue Erkenntnisse bringen.

Neben diesen sehr grundsätzlichen Fragestellungen gibt es auf der Anwendungsseite ebenfalls viele offene Fragen. Bis jetzt gibt es noch keine Bewegungsgleichungen für die Wigner-Funktionen in radialer Eichung. Obwohl wir berechnen können, wie sich die n -Punkt-Funktionen verändern, wenn man Schwerpunkt (aus den Dyson-Schwinger-Gleichungen) und Eichpunkt (aus den Slavnov-Taylor-Identitäten) variiert, sitzen wir vor dieser Frage wie vor einem Puzzle, bei dem man alle Teile in der Hand hat, aber (noch) nicht weiß, wie man sie zusammensetzen soll.

Darüber hinaus sind nicht alle Bewegungsgleichungen gleich gut für die Transporttheorie verwendbar. So läßt sich aus dem Dirac-Operator als Differentialoperator erster Ordnung nur auf Umwegen ein Driftterm gewinnen. Das Gleiche gilt für die Bewegungsgleichung für die aus Feldstärken konstruierte Gluon-Wigner-Funktion (2.79), da die Feldstärken ja auch partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen. Analog zur Vorgehensweise bei den Quarks kann man hier eine quadratische Yang-Mills-Gleichung verwenden [2]. In beiden Fällen werden dadurch die Dyson-Schwinger-Gleichungen stark verändert. Das Studium dieser modifizierten Gleichungen scheint aber bisher noch nie durchgeführt worden zu sein, obwohl dieses Phänomen ja nicht nur bei Eichtheorien auftritt, sondern im Grunde bei allen nicht-skalaren Feldern.

Nun sind wir wieder bei einem Aspekt angekommen, den wir in dem einführenden Kapitel 2 schon angesprochen haben, womit sich der Kreis schließt und wir unsere Ausführungen beenden.

Heinrich, mir graut vor Dir!
Gretchen, Faust I

A Gradientenentwicklung

In diesem Anhang beweisen wir folgende Beziehung:

$$\int d^4u e^{ik \cdot u} \int d^4y \Sigma(X + u/2, y) G(y, X - u/2) = e^{-i \diamond} \tilde{\Sigma}(X, k) \tilde{G}(X, k). \quad (\text{A.1})$$

Dabei sind \tilde{G} und $\tilde{\Sigma}$ die Wigner-Transformierten von G und Σ , und der Operator \diamond ist gegeben durch [10]

$$\diamond = \frac{1}{2} \left(\partial_X^\Sigma \cdot \partial_k^G - \partial_k^\Sigma \cdot \partial_X^G \right). \quad (\text{A.2})$$

Wir starten mit der Fourier-Transformierten der rechten Seite von (A.1):

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot u} e^{-i \diamond} \tilde{\Sigma}(X, k) \tilde{G}(X, k) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot u} e^{-i \diamond} \int d^4v e^{ik \cdot v} \Sigma(X + v/2, X - v/2) \\ & \quad \times \int d^4w e^{ik \cdot w} G(X + w/2, X - w/2) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot u} \int d^4v d^4w e^{ik \cdot v - \frac{1}{2}v \cdot \partial_X^G} e^{ik \cdot w + \frac{1}{2}w \cdot \partial_X^\Sigma} \Sigma(X + v/2, X - v/2) \\ & \quad \times G(X + w/2, X - w/2) \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot u} \int d^4v d^4w e^{ik \cdot v} e^{ik \cdot w} \Sigma(X + (v+w)/2, X - (v-w)/2) \\ & \quad \times G(X + (w-v)/2, X - (w+v)/2) \\ &= \int d^4v \Sigma(X + u/2, X - v + u/2) G(X - v + u/2, X - u/2) \\ &= \int d^4y \Sigma(X + u/2, y) G(y, X - u/2). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Durch Inversion der Fourier-Transformation nach k ergibt sich (A.1).

B Die Lagrange-Dichte des Maxwell-Feldes in Coulomb-Eichung

In diesem Anhang geben wir eine kurze Herleitung für Gleichung (3.38) an. Wir starten von der Wirkung des elektromagnetischen Feldes

$$\begin{aligned}
S_{\text{em}} &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_i A_0 \partial^i A^0 + \partial_\mu (A_i^{\text{tr}} + A_i^l) \partial^\mu (A_{\text{tr}}^i + A_i^i) \\
&\quad - 2\partial_0 (A_{\text{tr}}^i + A_i^i) \partial_i A^0 - \partial_i (A_{\text{tr}}^j + A_j^j) \partial_j (A_{\text{tr}}^i + A_i^i)]. \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die zeitlichen und räumlichen Komponenten explizit ausgeschrieben und letztere in longitudinale und transversale Anteile zerlegt:

$$A^i = A_{\text{tr}}^i + A_l^i \quad \text{mit} \quad \partial_i A_{\text{tr}}^i = 0. \quad (\text{B.2})$$

Bis jetzt haben wir immer noch die allgemeine Form der Wirkung des Maxwell-Feldes. Die Coulomb-Eichbedingung (3.37) bedeutet nun $A_l^i = 0$, und die Wirkung nimmt folgende Form an:

$$S_{\text{em}} = -\frac{1}{2} \int d^4x [\partial_i A_0 \partial^i A^0 + \partial_\mu A_i^{\text{tr}} \partial^\mu A_{\text{tr}}^i - 2\partial_0 A_{\text{tr}}^i \partial_i A^0 - \partial_i A_{\text{tr}}^j \partial_j A_{\text{tr}}^i]. \quad (\text{B.3})$$

Durch partielle Integration der beiden letzten Terme kann man auch diese zum Verschwinden bringen; es ergibt sich die in (3.38) gegebene Form der Lagrange-Dichte für die Coulomb-Eichung.

C Feynman-Regeln im Ortsraum

Für gewöhnlich finden sich in der einschlägigen Literatur, z.B. [12], die Feynman-Regeln in der Impulsraum-Darstellung. Da durch unsere radiale Eichbedingung die Translationsinvarianz der Theorie gebrochen ist, benötigen wir die Regeln aber im Ortsraum.

Beginnen wir mit dem Propagator eines skalaren Teilchens. In einem D -dimensionalen Euklidischen Raum ist er gegeben durch [78]

$$\Delta_S(x-y) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k^2} e^{-ik \cdot (x-y)}$$

$$= -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} [(x - y)^2]^{1-D/2}. \quad (\text{C.1})$$

Im Minkowski-Raum mit einer Zeit- und $D - 1$ Raumrichtungen ergibt sich [79]

$$\begin{aligned} \Delta_S(x - y) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i}{k^2 + i\eta} e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &= \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} [(x - y)^2 - i\epsilon]^{1-D/2}, \quad \eta, \epsilon \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Der Feynman-Propagator ist stets der um die Eins in der Farb- und Lorentz-Struktur erweiterte skalare Propagator:

$$\langle B_\mu^a(x) B_\nu^b(y) \rangle_{\text{Feyn}} = \delta_{\mu\nu} \delta^{ab} \Delta_S(x - y). \quad (\text{C.3})$$

Im Minkowski-Raum ist natürlich $\delta_{\mu\nu}$ durch $g_{\mu\nu}$ zu ersetzen.

Da alle Rechnungen mit Gluon-Vertizes, die in dieser Arbeit vorkommen, im Minkowski-Raum durchgeführt werden, geben wir die Vertizes nur für diesen Fall an. Um alle i - und Vorzeichen-Ambiguitäten auszuschließen, sollten wir auch angeben, wie unsere Vertizes definiert sind. Wir definieren den Drei-Gluon-Vertex \mathbf{T} durch

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda^a(w) A_\mu^b(x) A_\nu^c(y) \rangle &= \\ \int d^D w' d^D x' d^D y' \langle A_\lambda^a(w) A_{\lambda'}^{a'}(w') \rangle \langle A_\mu^b(x) A_{\mu'}^{b'}(x') \rangle \langle A_\nu^c(y) A_{\nu'}^{c'}(y') \rangle \mathbf{T}_{a'b'c'}^{\lambda'\mu'\nu'}(w', x', y'); \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

die Definition für den Vier-Gluon-Vertex \mathbf{Q} ist ganz analog.

In der jeweils niedrigsten Ordnung der Kopplungskonstanten ergeben sich die Ausdrücke, die in der Störungstheorie verwendet werden:

$$\begin{aligned} T_{abc}^{\lambda\mu\nu}(w, x, y) &= -igf_{abc} \left[g^{\lambda\mu} (\partial_w^\nu - \partial_x^\nu) \delta(x - y) \delta(w - y) \right. \\ &\quad + g^{\mu\nu} (\partial_x^\lambda - \partial_y^\lambda) \delta(y - w) \delta(x - w) \\ &\quad \left. + g^{\nu\lambda} (\partial_y^\mu - \partial_w^\mu) \delta(w - x) \delta(y - x) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

und

$$\begin{aligned} Q_{abcd}^{\kappa\lambda\mu\nu}(v, w, x, y) &= -ig^2 \left[f_{abe} f_{cde} (g^{\kappa\mu} g^{\nu\lambda} - g^{\kappa\nu} g^{\lambda\mu}) \right. \\ &\quad + f_{ace} f_{dbe} (g^{\kappa\nu} g^{\lambda\mu} - g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu}) \\ &\quad \left. + f_{ade} f_{bce} (g^{\kappa\lambda} g^{\mu\nu} - g^{\kappa\mu} g^{\nu\lambda}) \right] \delta(v - w) \delta(v - x) \delta(v - y). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

D Berechnung des freien radialen Propagators

Die folgenden Beziehungen sind nützlich zur Ableitung von (4.31):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x, y) &:= x_\alpha y_\beta \left(\delta_{\mu\nu} \partial_\alpha^x \partial_\beta^y + \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu^x \partial_\nu^y - \delta_{\alpha\nu} \partial_\mu^x \partial_\beta^y - \delta_{\mu\beta} \partial_\alpha^x \partial_\nu^y \right) \\ &= \delta_{\mu\nu} \partial_{|x|} \partial_{|y|} |x| |y| - \partial_\mu^x x_\nu \partial_{|y|} |y| - \partial_\nu^y y_\mu \partial_{|x|} |x| + \partial_\mu^x \partial_\nu^y x \cdot y; \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$s x_\alpha \partial_\beta^{sx} f(sx) = x_\alpha \partial_\beta^x f(x); \quad (\text{D.2})$$

$$\partial_{|x|} \int_0^1 ds |x| f(sx) = \partial_{|x|} \int_0^1 ds |x| f(s|x|\hat{x}) = \partial_{|x|} \int_0^{|x|} du f(u\hat{x}) = f(|x|\hat{x}) = f(x) \quad (\text{D.3})$$

für beliebige Funktionen f .

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \frac{4\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 = \\ & = \delta^{ab} \int_0^1 ds \int_0^1 dt T_{\mu\nu}(sx, ty) [(sx - ty)^2]^{1-D/2} \\ & = \delta^{ab} T_{\mu\nu}(x, y) \int_0^1 ds \int_0^1 dt [(sx - ty)^2]^{1-D/2} \\ & = \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} \partial_{|x|} \partial_{|y|} |x| |y| - \partial_\mu^x x_\nu \partial_{|y|} |y| - \partial_\nu^y y_\mu \partial_{|x|} |x| + \partial_\mu^x \partial_\nu^y x \cdot y \right) \\ & \quad \times \int_0^1 ds \int_0^1 dt [(sx - ty)^2]^{1-D/2} \\ & = \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} [(x - y)^2]^{1-D/2} \right. \\ & \quad - \partial_\mu^x \int_0^1 ds x_\nu [(sx - y)^2]^{1-D/2} - \partial_\nu^y \int_0^1 dt y_\mu [(x - ty)^2]^{1-D/2} \\ & \quad \left. + \underbrace{\partial_\mu^x \partial_\nu^y \int_0^1 ds \int_0^1 dt x \cdot y [(sx - ty)^2]^{1-D/2}}_{\sim \frac{1}{4-D}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Gewinnbringend ist auch eine Darstellung als Fourier-Integral [58]:

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 = \delta^{ab} T_{\mu\nu}(x, y) \int_0^1 ds \int_0^1 dt \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k^2} e^{-ik \cdot (sx - ty)}$$

$$= \delta^{ab} T_{\mu\nu}(x, y) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k^2} \frac{e^{-ik \cdot x} - 1}{-ik \cdot x} \frac{e^{ik \cdot y} - 1}{ik \cdot y}. \quad (\text{D.5})$$

Der divergente Anteil entsteht aus dem Term ohne Exponentialfunktionen:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-1}{k^2} \frac{-1}{-ik \cdot x} \frac{-1}{ik \cdot y} \sim \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{1}{k^4}. \quad (\text{D.6})$$

Der letzte Ausdruck scheint für $D \rightarrow 4$ sowohl ultraviolett- als auch infrarot-divergent zu sein. Man überzeugt sich aber leicht davon, daß die Infrarot-Divergenz von den Exponentialfunktionen behoben wird:

$$\frac{e^{-ik \cdot x} - 1}{-ik \cdot x} = 1 + o(|k|). \quad (\text{D.7})$$

Für die Ultraviolett-Singularität dagegen gibt es keinen derartigen Regularisierungsmechanismus.

Interessant ist ein Vergleich des hier dargestellten Vakuum-Propagators mit einem thermischen Propagator. An die Stelle von $-1/k^2$ in (D.5) tritt zunächst $-i/(k^2 + i\eta)$ beim Übergang vom Euklidischen in den Minkowski-Raum. Bei endlicher Temperatur T wird dieser Propagator dann ergänzt zu [6]

$$\frac{-i}{k^2 + i\eta} - 2\pi \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \delta(k^2). \quad (\text{D.8})$$

Bemerkenswert ist nun, daß der temperaturabhängige Zusatzterm keine Ultraviolett-Singularität produziert:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{e^{k_0/T} - 1} \delta(k^2) \frac{-1}{-ik \cdot x} \frac{-1}{ik \cdot y} = \text{UV-endlich}. \quad (\text{D.9})$$

Insofern ist die Singularität des radialen Propagators eine typische Vakuum-Divergenz. Das läßt sich zusätzlich untermauern, indem man statt des äquilibrierten ein beliebiges Ensemble betrachtet. Die Bose-Verteilung wird dann ersetzt durch eine allgemeine Phasenraum-Verteilungsfunktion $f(X, k)$ und die δ -Funktion für die Massenschale durch die Spektralfunktion $\mathcal{A}(X, k)$ — falls man auch *off-shell*-Effekte mit berücksichtigt [10]. Das Impulsraum-Integral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(X, k) \mathcal{A}(X, k) \quad (\text{D.10})$$

liefert die Teilchendichte des Systems und ist endlich. Daran ändern die Faktoren $1/k \cdot x$ und $1/k \cdot y$ aber nichts, sie erhöhen sogar die Konvergenz des Integrals für $k \rightarrow \infty$.

E Der renormierte freie radiale Propagator

In diesem Anhang soll gezeigt werden, daß es sich bei der Divergenz des radialen Propagators wirklich um eine *cusp*-Singularität handelt. Dazu werden wir ein Renormierungsprogramm für den zugehörigen Wilson-Loop (4.35) durchführen und zeigen, daß auf die gleiche Weise der radiale Propagator renormiert wird. Da es uns nur um den freien Propagator geht, können wir uns bei der Renormierung des Wilson-Loops auf die Ordnung g^2 beschränken.

Als Regularisierungsschema verwenden wir die dimensionale Regularisierung. Das motiviert letztendlich die Einführung eines allgemeinen D -dimensionalen Raumes zu Beginn von Kapitel 4. Für weitere Einzelheiten über Renormierung verweisen wir auf die einschlägige Literatur [12], [80].

Zunächst erfolgt die für alle Wilson-Loops notwendige Ladungsrenormierung. Formal [65]:

$$\tilde{W}_1(x, x', y, y'; g_R, \mu, D) = \mathcal{R}W_1(x, x', y, y'; g, D). \quad (\text{E.1})$$

Der Ausdruck W_1 auf der rechten Seite ist nichts anderes als (4.35), nur daß wir nun seine Abhängigkeit von der Zahl der Dimensionen D und der nackten Kopplungskonstanten g explizit angegeben haben. Durch das Renormierungsschema \mathcal{R} kommt der Massenrenormierungspunkt μ ins Spiel. Da die entsprechenden Divergenzen erst ab Ordnung g^4 auftreten, beschränkt sich diese Prozedur auf die Einführung einer dimensionslosen renormierten Kopplungskonstanten

$$g_R = \mu^{(D-4)/2} g + o(g^3). \quad (\text{E.2})$$

Nun kommt die eigentliche Arbeit, die Regularisierung und Renormierung der *cusp*-Divergenzen. Nach [63] ist jeder Knick multiplikativ renormierbar, wobei der Renormierungsfaktor Z vom jeweiligen Winkel abhängt. In unserem Fall gibt es vier Knicke mit den Winkeln

$$\alpha := \angle(x - x', -x), \quad (\text{E.3})$$

$$\alpha' := \angle(x', x - x'), \quad (\text{E.4})$$

$$\beta := \angle(y - y', -y), \quad (\text{E.5})$$

$$\beta' := \angle(y', y - y'). \quad (\text{E.6})$$

Der Kreuzungspunkt am Ursprung ist alleine nicht multiplikativ renormierbar, sondern nur zusammen mit

$$W_2(x, x', y, y') := \left\langle \frac{1}{N} \text{Sp}[U(0, x)U(x, x')U(x', 0)] \frac{1}{N} \text{Sp}[U(0, y)U(y, y')U(y', 0)] \right\rangle. \quad (\text{E.7})$$

Auch die Elemente der entsprechenden 2×2 -Renormierungsmatrix, die die Mischung zwischen W_1 und W_2 beschreibt, hängen von den am Kreuzungspunkt auftretenden Winkeln ab:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xx'} &:= \angle(-x, x') \\ \gamma_{yy'} &:= \angle(-y, y') \\ \gamma_{xy} &:= \angle(-x, -y) \\ \gamma_{x'y'} &:= \angle(x', y') \\ \gamma_{x'y} &:= \angle(x', -y) \\ \gamma_{xy'} &:= \angle(-x, y') \end{aligned} \right\} \vec{\gamma}. \quad (\text{E.8})$$

Der renormierte Wilson-Loop W_1^R ist schließlich gegeben durch

$$\begin{aligned} W_1^R(x, x', y, y'; g_R, \mu, \bar{C}_\alpha, \bar{C}_{\alpha'}, \bar{C}_\beta, \bar{C}_{\beta'}, \bar{C}_{\vec{\gamma}}) \\ = \lim_{D \rightarrow 4} Z(\bar{C}_\alpha, g_R, \mu; D) Z(\bar{C}_{\alpha'}, g_R, \mu; D) Z(\bar{C}_\beta, g_R, \mu; D) Z(\bar{C}_{\beta'}, g_R, \mu; D) \\ \times \left[Z_{11}(\bar{C}_{\vec{\gamma}}, g_R, \mu; D) \tilde{W}_1(x, x', y, y'; g_R, \mu, D) \right. \\ \left. + Z_{12}(\bar{C}_{\vec{\gamma}}, g_R, \mu; D) \tilde{W}_2(x, x', y, y'; g_R, \mu, D) \right] \\ =: \lim_{D \rightarrow 4} \bar{W}_1(x, x', y, y'; g_R, \mu, \bar{C}_\alpha, \bar{C}_{\alpha'}, \bar{C}_\beta, \bar{C}_{\beta'}, \bar{C}_{\vec{\gamma}}; D). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Durch die *cusp*-Renormierung werden neue (winkelabhängige) Renormierungspunkte $\bar{C}_{(\text{Winkel})}$ eingeführt.

Die renormierte Version des in (4.36) gegebenen radialen Propagators ist konsequenterweise definiert durch

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_R := \lim_{D \rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \frac{1}{(ig_R)^2} \mu^{D-4} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \bar{W}_1(x, x', y, y'; D), \quad (\text{E.10})$$

wobei wir der Übersichtlichkeit halber die meisten Variablen, von denen \bar{W}_1 abhängt, unterdrückt haben.

Wir beschränken uns nun auf den freien Propagator und berechnen \tilde{W}_i , $i = 1, 2$, und daraus wiederum die Renormierungsfaktoren Z bis zur Ordnung g_R^2 :

$$\tilde{W}_i = 1 + (ig_R)^2 \delta \tilde{W}_i + o(g_R^4) \quad (i = 1, 2), \quad (\text{E.11})$$

$$Z = 1 + (ig_R)^2 \delta Z + o(g_R^4), \quad (\text{E.12})$$

$$Z_{11} = 1 + (ig_R)^2 \delta Z_{11} + o(g_R^4), \quad (\text{E.13})$$

$$Z_{12} = 0 + (ig_R)^2 \delta Z_{12} + o(g_R^4). \quad (\text{E.14})$$

Man beachte, daß das nichtdiagonale Element Z_{12} der Mischungsmatrix für den Kreuzungspunkt am Ursprung keinen g_R -unabhängigen Anteil besitzt. Das ist eine Konsequenz aus der Tatsache, daß alle Loops für $g = 0$ trivial den Wert Eins annehmen, also nicht renormierungsbedürftig sind. Dann reduziert sich natürlich

auch die Mischungsmatrix auf die Einheitsmatrix. Diese an sich triviale Feststellung hat aber zur Folge, daß $\delta\tilde{W}_2$ für die Berechnung des renormierten freien Propagators gar nicht gebraucht wird:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x)A_\nu^b(y)\rangle_R^0 &= \lim_{D\rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2-1} \mu^{D-4} \\ &\times \lim_{\substack{x'\rightarrow x \\ y'\rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left[\begin{array}{l} \delta Z(\bar{C}_\alpha) + \delta Z(\bar{C}_{\alpha'}) + \delta Z(\bar{C}_\beta) + \delta Z(\bar{C}_{\beta'}) \\ + \delta Z_{11} + \delta Z_{12} + \delta\tilde{W}_1 \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Da W_1 eichinvariant ist, können wir eine beliebige Eichung für seine Berechnung wählen. Der Einfachheit halber greifen wir wieder auf die Feynman-Eichung zurück. Gemäß (4.38) brauchen wir in der für uns relevanten Ordnung g^2 von den Greenschen Funktionen nur die Zwei-Punkt-Funktion und auch von dieser nur den freien Anteil, kurz und gut also nur den freien Feynman-Propagator (4.30). Mit folgenden Definitionen für die auftretenden Integrale:

$$I_1 := \int_0^1 ds \int_0^1 dt \Theta(s-t) \frac{1}{[(s-t)^2]^{D/2-1}}, \quad (\text{E.16})$$

$$I_2(p, q) := \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{p \cdot q}{[(sp + tq)^2]^{D/2-1}}, \quad (\text{E.17})$$

$$I_3(m, p, q) := \int_0^1 ds \int_0^1 dt \frac{p \cdot q}{[(m + sp + tq)^2]^{D/2-1}} \quad (\text{E.18})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta\tilde{W}_1 &= -\mu^{4-D} \frac{N^2-1}{2N} \frac{\Gamma(D/2-1)}{4\pi^{D/2}} \\ &\times \left[(|x'|^{4-D} + |x-x'|^{4-D} + |x|^{4-D} + |y'|^{4-D} + |y-y'|^{4-D} + |y|^{4-D}) I_1 \right. \\ &+ I_2(x', x-x') + I_2(x-x', -x) + I_2(-x, x') \\ &+ I_2(y', y-y') + I_2(y-y', -y) + I_2(-y, y') \\ &- I_2(x', -y') + I_2(x', -y) + I_2(y', -x) - I_2(x, -y) \\ &- I_3(y', -x', y-y') + I_3(y', -x, y-y') - I_3(x'-y', x-x', y'-y) \\ &\left. - I_3(x', -y', x-x') + I_3(x', -y, x-x') \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Zur Berechnung der Z -Faktoren müssen wir ein Renormierungsschema wählen. Das folgende in [65] angegebene *minimal subtraction scheme* ist für unsere Belange besonders geeignet. In dimensionaler Regularisierung sind alle Divergenzen als Summe von Pol-Termen gegeben. Wir definieren nun den entsprechenden Z -Faktor gerade als die jeweilige Summe. Konkret heißt das, daß wir von obigen

Integralen nur die divergenten Anteile bestimmen müssen. Das ist in Anhang F durchgeführt mit dem Ergebnis

$$I_1 = -\frac{1}{4-D} + \text{endl. Anteil}, \quad (\text{E.20})$$

$$I_2(p, q) = \frac{1}{4-D} \gamma \cot \gamma + \text{endl. Anteil}, \quad (\text{E.21})$$

wobei γ den Winkel zwischen p und q darstellt. Das Integral I_3 ist endlich, solange $m \neq 0$ erfüllt ist. Das gewählte Renormierungsschema hat die bemerkenswerte Eigenschaft, daß die Z -Faktoren nur von den Winkeln abhängen, nicht aber von der Länge der Loop-Kontur oder Teilen davon. Mit Hilfe von (E.20, E.21) lassen sich die Z -Faktoren von (E.19) ablesen [64]:

$$\delta Z(\bar{C}_\alpha) = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\alpha \cot \alpha - 1), \quad (\text{E.22})$$

$$\delta Z(\bar{C}_{\alpha'}) = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\alpha' \cot \alpha' - 1), \quad (\text{E.23})$$

$$\delta Z(\bar{C}_\beta) = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\beta \cot \beta - 1), \quad (\text{E.24})$$

$$\delta Z(\bar{C}_{\beta'}) = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\beta' \cot \beta' - 1), \quad (\text{E.25})$$

$$\delta Z_{11} = \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} [(\gamma_{x'y} \cot \gamma_{x'y} - 1) + (\gamma_{xy'} \cot \gamma_{xy'} - 1)], \quad (\text{E.26})$$

$$\begin{aligned} \delta Z_{12} = & \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} [\gamma_{xx'} \cot \gamma_{xx'} + \gamma_{yy'} \cot \gamma_{yy'} \\ & - (\pi - \gamma_{x'y'}) \cot(\pi - \gamma_{x'y'}) - (\pi - \gamma_{xy}) \cot(\pi - \gamma_{xy})]. \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Für die Berechnung des renormierten freien Propagators benutzen wir nun die Tatsache, daß wegen der zweifachen Ableitung $\partial_\mu^x \partial_\nu^y$ in (E.15) nur Summanden übrigbleiben, die sowohl von x als auch von y abhängen. Das trifft aber nur auf den Winkel γ_{xy} und somit von allen δZ nur auf δZ_{12} zu. Schließlich stellen wir fest, daß W_1 und \tilde{W}_1 in Ordnung g^2 im wesentlichen übereinstimmen — nur ein Faktor μ^{D-4} kommt aus Dimensionsgründen hinzu. Das liefert

$$\begin{aligned} & \lim_{D \rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \mu^{D-4} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \delta \tilde{W}_1 \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \frac{1}{(ig)^2} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y (1 + (ig)^2 \delta W_1) \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \frac{1}{(ig)^2} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y W_1 \Big|_{g=0} \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Insgesamt ergibt sich der renormierte freie radiale Propagator zu

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_R^0 &= \lim_{D \rightarrow 4} \delta^{ab} \frac{2N}{N^2 - 1} \mu^{D-4} \lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \partial_\mu^x \partial_\nu^y (\delta Z_{12} + \delta \tilde{W}_1) \\ &= \lim_{D \rightarrow 4} \left(\delta^{ab} \mu^{D-4} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot \gamma_{xy} \right) + \langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 \right). \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß obiger *counter term*

$$C_{\mu\nu}^{ab}(x, y) := \delta^{ab} \mu^{D-4} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot \gamma_{xy} \right) \quad (\text{E.30})$$

gerade die Divergenz des freien radialen Propagators (4.31) beseitigt: Letztere ist ja gegeben durch

$$U_{\mu\nu}^{ab}(x, y) := -\frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \int_0^1 ds \int_0^1 dt x \cdot y [(sx - ty)^2]^{1-D/2}. \quad (\text{E.31})$$

Mit den Formeln (E.17, F.12) kann man auch hier den divergenten Anteil isolieren:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}^{ab}(x, y) &= \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \partial_\mu^x \partial_\nu^y I_2(x, -y) \\ &= \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{4\pi^{D/2}} \delta^{ab} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot(\pi - \gamma_{xy}) + \text{endl. Anteil} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \delta^{ab} \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left(\frac{1}{4-D} (\pi - \gamma_{xy}) \cot \gamma_{xy} \right) + \text{endl. Anteil}, \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

folglich:

$$U_{\mu\nu}^{ab}(x, y) + C_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = \text{endlich für } D \rightarrow 4. \quad (\text{E.33})$$

F Berechnung einiger Integrale

In diesem Anhang werden die divergenten Anteile der in (E.16) bzw. (E.17) definierten Integrale I_1 und I_2 in dimensionaler Regularisierung ermittelt.

Für die Berechnung von I_1 benutzen wir die Substitution

$$g = s - t \quad , \quad h = s + t \quad (\text{F.1})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dg \int_g^{2-g} dh g^{2-D} = \int_0^1 dg (1-g) g^{2-D} \\ &= \frac{\Gamma(2)\Gamma(3-D)}{\Gamma(5-D)} = \frac{1}{(4-D)(3-D)}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Bei I_2 ist es nützlich, die Divergenz am Ursprung durch die Substitution

$$\lambda = s + t \quad , \quad x = s/\lambda \quad (\text{F.3})$$

abzutrennen:

$$\begin{aligned} I_2(p, q) &= \left(\int_0^{1/2} dx \int_0^{1/(1-x)} d\lambda + \int_{1/2}^1 dx \int_0^{1/x} d\lambda \right) \lambda^{3-D} \frac{p \cdot q}{[(xp + (1-x)q)^2]^{D/2-1}} \\ &= \int_0^{1/2} dx \frac{(1-x)^{D-4}}{4-D} \frac{p \cdot q}{[(xp + (1-x)q)^2]^{D/2-1}} \\ &\quad + \int_{1/2}^1 dx \frac{x^{D-4}}{4-D} \frac{p \cdot q}{[(xp + (1-x)q)^2]^{D/2-1}} . \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Wir führen

$$u(x) := xp + (1-x)q \quad (\text{F.5})$$

und den Winkel zwischen p und q ein,

$$\cos \gamma := \frac{p \cdot q}{|p| |q|} , \quad (\text{F.6})$$

sowie die Substitution [65]

$$e^{2i\psi} = \frac{x|p| + (1-x)|q|e^{i\gamma}}{x|p| + (1-x)|q|e^{-i\gamma}} . \quad (\text{F.7})$$

Geometrisch betrachtet ist ψ der Winkel zwischen p und $u(x)$. Die in (F.4) auftretenden Terme sind folgendermaßen mit ψ verknüpft:

$$x = |q| \sin(\gamma - \psi) / N(\psi) \quad , \quad 1 - x = |p| \sin \psi / N(\psi) , \quad (\text{F.8})$$

$$[u(x)]^2 = p^2 q^2 \sin^2 \gamma / [N(\psi)]^2 \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{dx} = - \frac{[N(\psi)]^2}{|p| |q| \sin \gamma} \quad (\text{F.9})$$

mit

$$N(\psi) := |p| \sin \psi + |q| \sin(\gamma - \psi) . \quad (\text{F.10})$$

Schließlich brauchen wir noch die neue Integrationsgrenze

$$\psi' := \psi(x = 1/2) , \quad (\text{F.11})$$

die geometrisch den Winkel zwischen p und $p + q$ darstellt (vgl. Abb. 18).

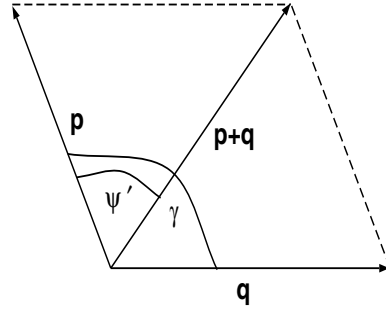


Abbildung 18: Geometrische Veranschaulichung der Variablen, die bei der Berechnung von I_2 gemäß (F.4-F.12) auftreten.

Nun kann's losgehen:

$$\begin{aligned}
I_2(p, q) &= \int_{\gamma}^{\psi'} d\psi \frac{-|p| |q| \sin \gamma}{N^2} \left(\frac{|p| \sin \psi}{N} \right)^{D-4} \left(\frac{N^2}{p^2 q^2 \sin^2 \gamma} \right)^{D/2-1} \frac{p \cdot q}{4-D} \\
&\quad + \int_{\psi'}^0 d\psi \frac{-|p| |q| \sin \gamma}{N^2} \left(\frac{|q| \sin(\gamma - \psi)}{N} \right)^{D-4} \left(\frac{N^2}{p^2 q^2 \sin^2 \gamma} \right)^{D/2-1} \frac{p \cdot q}{4-D} \\
&= \frac{-1}{4-D} \cos \gamma \sin^{3-D} \gamma \left(|q|^{4-D} \int_{\gamma}^{\psi'} d\psi \sin^{D-4} \psi + |p|^{4-D} \int_{\psi'}^0 d\psi \sin^{D-4}(\gamma - \psi) \right) \\
&= \frac{-1}{4-D} \cos \gamma \sin^{3-D} \gamma \left(|q|^{4-D} \int_{\gamma}^{\psi'} d\psi \sin^{D-4} \psi + |p|^{4-D} \int_{\gamma}^{\gamma-\psi'} d\psi \sin^{D-4} \psi \right) \\
&= \frac{1}{4-D} \gamma \cot \gamma + \text{endl. Anteil.} \tag{F.12}
\end{aligned}$$

G Rechenregeln für das Äquivalenzprinzip

In diesem Anhang sollen die Regeln aus den Abb. 4, 9 und 15 so ergänzt werden, daß damit auch für Diagramme höherer Ordnung die Eichinvarianz rein graphisch überprüft werden kann. Das Prinzip ist immer gleich. Man läßt den Ableitungsoperator, der bei einem Δ steht, auf einen Drei-Gluon-Vertex wirken und erhält dadurch einerseits Diagramme mit äußeren Pfeilen und andererseits Geistlinien mit neuen Ableitungsoperatoren. Diese läßt man dann weiter auf den

jeweils nächsten Vertex wirken. Für die äußeren Pfeile gibt es drei Möglichkeiten: Sie können auf einen Drei-Gluon-Vertex, auf einen Vier-Gluon-Vertex oder auf einen Geist zeigen. Dafür gibt es die drei in den Abb. 15, 19 und 20 dargestellten Regeln. In Abb. 19 haben wir explizit die äußeren Farbfaktoren der Diagramme angegeben, um zu zeigen, welche äußeren Linien zusammengehören. Die entsprechende Formel ist

$$\begin{aligned}
& \int d^D v' g f_{eah} g_{\kappa'}^{\kappa} \delta(u-v) \delta(u-v') Q_{hbcd}^{\kappa' \lambda \mu \nu}(v', w, x, y) \\
& \quad + \int d^D w' g f_{ebh} g_{\lambda'}^{\lambda} \delta(u-w) \delta(u-w') Q_{ahcd}^{\kappa \lambda' \mu \nu}(v, w', x, y) \\
& = \int d^D x' g f_{ehc} g_{\mu'}^{\mu} \delta(u-x) \delta(u-x') Q_{abhd}^{\kappa \lambda \mu' \nu}(v, w, x', y) \\
& \quad + \int d^D y' g f_{ehd} g_{\nu'}^{\nu} \delta(u-y) \delta(u-y') Q_{abch}^{\kappa \lambda \mu \nu'}(v, w, x, y'). \quad (G.1)
\end{aligned}$$

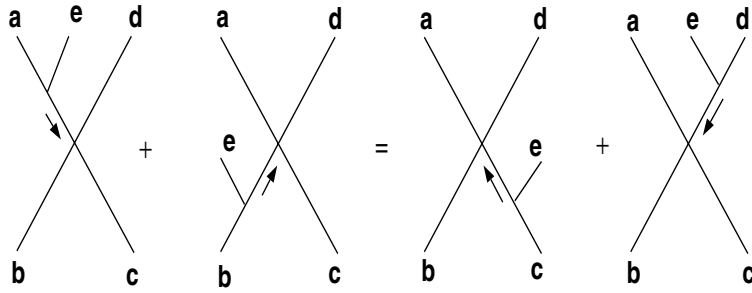


Abbildung 19: Relation zwischen Vier-Gluon-Vertizes.

Die Relation in Abb. 20 ist im Grunde nur eine etwas komplizierte Version der Bianchi-Identität:³³

$$\begin{aligned}
& \int d^D v' G_{\mu}^{abe}(w, v') \delta(v-v') g f^{ecd} \delta(x-v') \delta(x-y) = \\
& \quad \int d^D v' G_{\nu}^{dbe}(w, v') \delta(y-v') g f^{eca} g_{\mu}^{\nu} \delta(x-v) \delta(x-v') \\
& \quad + \int d^D v' G_{\nu}^{ebc}(w, x) \delta(v'-x) g f^{eda} g_{\mu}^{\nu} \delta(y-v) \delta(y-v'). \quad (G.2)
\end{aligned}$$

Sie fehlt übrigens in [33].

Die Wirkung des Ableitungoperators (innerer Pfeil) auf verschiedene Vertizes ergibt sich aus den Abb. 4, 9, 11 und 15.

³³ $f^{abe} f^{cde} + f^{ace} f^{dbe} + f^{ade} f^{bce} = 0$.

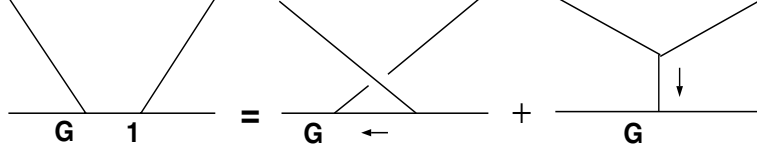


Abbildung 20: Relation zwischen Geist-Diagrammen.

Bei der Berechnung von Wilson-Loops tritt zusätzlich der Fall auf, daß ein Ableitungsoperator beim Konturintegral steht, z.B.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\sigma_1 \int_0^1 d\sigma_2 \int_0^1 d\sigma_3 \Theta(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3) w_{\mu_1}(\sigma_1) w_{\mu_2}(\sigma_2) w_{\mu_3}(\sigma_3) \\
& \quad \times \int d^D x_1 \int d^D x_2 \int d^D x_3 D^{\mu_1 \nu_1}(w(\sigma_1), x_1) \partial_{w(\sigma_2)}^{\mu_2} \Delta^{\nu_2}(w(\sigma_2), x_2) D^{\mu_3 \nu_3}(w(\sigma_3), x_3) \\
& \quad \times T_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{a_1 a_2 a_3}(x_1, x_2, x_3) \text{Sp}(t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3}) \\
& = \int_0^1 d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_3 \int_{\sigma_3}^{\sigma_1} d\sigma_2 w_{\mu_1}(\sigma_1) w_{\mu_2}(\sigma_2) w_{\mu_3}(\sigma_3) \\
& \quad \times \int d^D x_1 \int d^D x_2 \int d^D x_3 D^{\mu_1 \nu_1}(w(\sigma_1), x_1) \partial_{w(\sigma_2)}^{\mu_2} \Delta^{\nu_2}(w(\sigma_2), x_2) D^{\mu_3 \nu_3}(w(\sigma_3), x_3) \\
& \quad \times T_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{a_1 a_2 a_3}(x_1, x_2, x_3) \text{Sp}(t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3}). \tag{G.3}
\end{aligned}$$

Dabei parametrisiert $w(\sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$, eine beliebige Kontur, vgl. (4.38). Nun kann man aber, wie schon in Abschnitt 4.4.1, die Beziehung

$$\dot{w}_{\mu_2} \partial_{w(\sigma_2)}^{\mu_2} = \frac{d}{d\sigma_2} \tag{G.4}$$

dazu benutzen, das Konturintegral auszuwerten:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} d\sigma_3 w_{\mu_1}(\sigma_1) w_{\mu_3}(\sigma_3) \int d^D x_1 \int d^D x_2 \int d^D x_3 D^{\mu_1 \nu_1}(w(\sigma_1), x_1) \\
& \quad \times [\Delta^{\nu_2}(w(\sigma_1), x_2) - \Delta^{\nu_2}(w(\sigma_3), x_2)] D^{\mu_3 \nu_3}(w(\sigma_3), x_3) \\
& \quad \times T_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^{a_1 a_2 a_3}(x_1, x_2, x_3) \text{Sp}(t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3}). \tag{G.5}
\end{aligned}$$

Das ist in Abb. 21 dargestellt. Zudem ist dort zu sehen, mit welchen anderen Diagrammen das Resultat zusammengehört. Zur Unterscheidung von den Propagator-Linien ist die Kontur des Wilson-Loops durch eine Doppellinie veranschaulicht.

Schließlich kann man auch Fermionen mit einbeziehen. Dann kann der Ableitungsoperator auch auf einen Fermion-Gluon-Vertex treffen. Beispielsweise hat

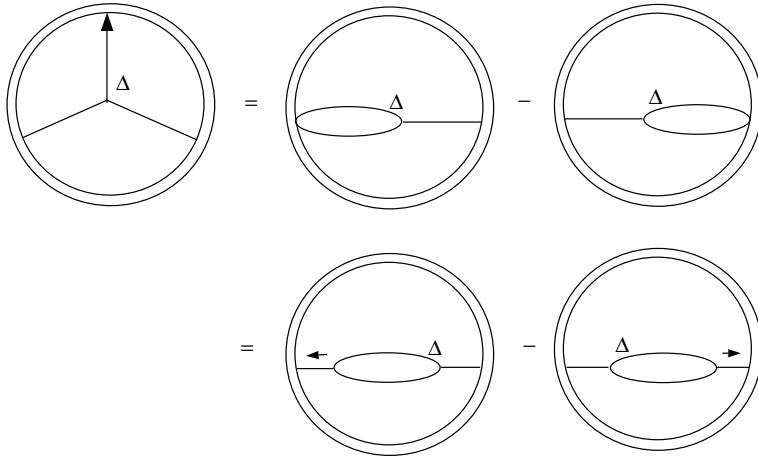


Abbildung 21: Zusatzrelation für Wilson-Loops.

man die folgende Drei-Punkt-Funktion (an der Stelle von Δ könnte auch ein G stehen):

$$\begin{aligned}
 & \int d^D x' \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle \gamma_\mu \langle \psi(x') \bar{\psi}(y) \rangle \partial_{x'}^\mu \Delta_\nu(x', w) \\
 &= - \int d^D x' \partial_{x'}^\mu \left(\langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle \gamma_\mu \langle \psi(x') \bar{\psi}(y) \rangle \right) \Delta_\nu(x', w) \\
 &= - \int d^D x' \left(\langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle (\partial_{x'}^{\mu\dagger} \gamma_\mu - im) \langle \psi(x') \bar{\psi}(y) \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle (\gamma_\mu \partial_{x'}^\mu + im) \langle \psi(x') \bar{\psi}(y) \rangle \right) \Delta_\nu(x', w) \\
 &= \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \Delta_\nu(x, w) - \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle \Delta_\nu(y, w). \tag{G.6}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle$ den freien Fermionpropagator, und wir haben die freie Dirac-Gleichung benutzt, um die letzte Zeile zu erhalten. Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Abb. 22 dargestellt. Die Doppellinie mit Pfeil steht für den (gerichteten) Fermionpropagator.

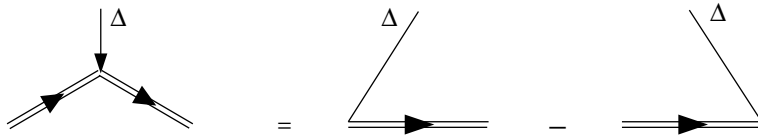


Abbildung 22: Zusatzrelation für Fermionen.

Literatur

- [1] R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1975);
Yu.L. Klimontovich, *The Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma* (Pergamon Press, Oxford, 1967).
- [2] H.-Th. Elze und U. Heinz, *Phys. Rep.* **183** (1989) 81.
- [3] P. Danielewicz, *Ann. Phys.* **152** (1984) 239, 305.
- [4] C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [5] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407;
P.M. Bakshi und K.T. Mahanthappa, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 1, 12;
L.V. Keldish, *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.
- [6] R.J. Rivers, *Path integral methods in quantum field theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987).
- [7] T.-P. Cheng und L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford University Press, Oxford, 1988);
D. Bailin und A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993).
- [8] St. Mrówczyński und P. Danielewicz, *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 345.
- [9] St. Mrówczyński und U. Heinz, *Ann. Phys.* **229** (1994) 1.
- [10] P. Henning, *Nucl. Phys.* **A582** (1995) 633; *Phys. Rep.* **253** (1995) 235.
- [11] J.D. Bjorken, S.D. Drell, *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Hochschultaschenbücher: Bd. 101 (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967).
- [12] P. Pascual und R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner, Lecture Notes in Physics*, Vol. 194 (Springer, Berlin, 1984).
- [13] N.E. Bralic, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 3090.
- [14] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung* (Teubner, Stuttgart, 1983).
- [15] H. Weigert, *Nichtabelsche kinetische Gleichungen und ihre semiklassische Entwicklung*, Diplomarbeit, Universität Regensburg, 1989.
- [16] U. Heinz, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 351.

- [17] H. Heiselberg und X.-N. Wang, eprint hep-ph/9601247, Jan. 1996.
- [18] V.A. Fock, Sov. Phys. **12** (1937) 404;
J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1952) 684.
- [19] C. Cronström, Phys. Lett. **B90** (1980) 267.
- [20] W. Kummer und J. Weiser, Z. Phys. **C31** (1986) 105.
- [21] G. Modanese, J. Math. Phys. **33** (1992) 1523.
- [22] M. Azam, Phys. Lett. **B101** (1981) 401.
- [23] M.A. Shifman, Nucl. Phys. **B173** (1980) 13.
- [24] I. Białynicki-Birula, P. Górnicki und J. Rafelski, Phys. Rev. **D44** (1991) 1825;
I. Białynicki-Birula, E.D. Davis und J. Rafelski, Phys. Lett. **B311** (1993) 329.
- [25] P. Zhuang und U. Heinz, Ann. Phys. **245** (1996) 311; Phys. Rev. **D53**,
15. Feb. 1996; preprint TPR-96-01, Universität Regensburg.
- [26] R. Fauser, Korrelationen in der Störungsreihe und in Transporttheorien für Systeme im Nichtgleichgewicht, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1995.
- [27] H.-Th. Elze, Z. Phys. **C47** (1990) 647.
- [28] S.J. Wang, W. Cassing, J.M. Häuser, A. Peter und M.H. Thoma, Ann. Phys. **242** (1995) 235.
- [29] Klaus Geiger, eprint hep-ph/9507365, Jul. 1995.
- [30] W. Kummer, Acta Phys. Austr. **41** (1975) 315;
W. Konetschny und W. Kummer, Nucl. Phys. **B100** (1975) 106.
- [31] S. Caracciolo, G. Curci und P. Menotti, Phys. Lett. **B113** (1982) 311.
- [32] P.V. Landshoff, in: Physical and Nonstandard Gauges, Lecture Notes in Physics, Vol. 361 (Springer, Berlin, 1990), 74ff.
- [33] H. Cheng und E.-C. Tsai, The Theorem of Equivalence and The Anomalous Coulomb Interaction, MIT-preprint (1986).
- [34] H. Cheng und E.-C. Tsai, Phys. Rev. **D36** (1987) 3196.
- [35] H. Cheng, Why Canonical Quantization is the Only Known Way to Quantize Correctly, in: Physical and Nonstandard Gauges, Lecture Notes in Physics, Vol. 361 (Springer, Berlin, 1990), 3ff.

- [36] J.-P. Leroy, J. Micheli und G.-C. Rossi, *Z. Phys.* **C36** (1987) 305.
- [37] F. Palumbo, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 109.
- [38] H. Weigert, Radiale Eichungen für die QCD im Nichtgleichgewicht, Dissertation, Universität Regensburg, 1993.
- [39] V.N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139** (1978) 1.
- [40] P.A.M. Guichon und D. Schütte, SACLAY-DPHN-90-47, Aug. 1990.
- [41] J. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
- [42] R.N. Mohapatra, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 378, 1007.
- [43] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **127** (1962) 344.
- [44] N.H. Christ und T.D. Lee, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 939.
- [45] P. Doust, *Ann. Phys.* **177** (1987) 169.
- [46] P.J. Doust und J.C. Taylor, *Phys. Lett.* **B197** (1987) 232.
- [47] G. Leibbrandt und J. Williams, eprint hep-th/9601046, Jan. 1996.
- [48] E.S. Abers und B.W. Lee, *Phys. Rep.* **9C** (1973) 1.
- [49] S.F. Edwards und Y.V. Gulyaev, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A279** (1964) 229;
D.W. McLaughlin und L.S. Schulman, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2520.
- [50] H. Kleinert, *Pfadintegrale in Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik* (Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim, 1993).
- [51] P.A.M. Dirac, *Canad. J. Math.* **2** (1950) 129.
- [52] Y. Kakudo, Y. Taguchi, A. Tanaka und K. Yamamoto, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 1954.
- [53] I. Bialynicki-Birula und P. Kurzepa, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 3000.
- [54] G.C. Rossi und M. Testa, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2997.
- [55] D. Ebert, *Eichtheorien* (Akademie-Verlag Berlin, Berlin, 1989).
- [56] S.V. Ivanov und G.P. Korchemskij, *Phys. Lett.* **B154** (1985) 197.
- [57] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445.

- [58] H. Weigert und U. Heinz, *Z. Phys.* **C56** (1992) 145.
- [59] H. O. Girotti und H. J. Rothe, *Phys. Lett.* **B115** (1982) 257.
- [60] J. Barcelos-Neto, C.A.P. Galvão und P. Gaete, *Phys. Lett.* **A157** (1991) 96.
- [61] S. Leupold und H. Weigert, *Radial Propagators and Wilson Loops*, preprint TPR-95-31, Universität Regensburg.
- [62] V.S. Dotsenko und S.N. Vergeles, *Nucl. Phys.* **B169** (1980) 527.
- [63] R.A. Brandt, F. Neri und M.-A. Sato, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 879.
- [64] R.A. Brandt, A. Gocksch, M.-A. Sato und F. Neri, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 3611.
- [65] G.P. Korchemsky und A.V. Radyushkin, *Nucl. Phys.* **B283** (1987) 342.
- [66] I.A. Korchemskaya und G.P. Korchemsky, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 127.
- [67] J.L. Gervais und A. Neveu, *Nucl. Phys.* **B163** (1980) 189.
- [68] P. Menotti, G. Modanese und D. Seminara, *Ann. Phys.* **224** (1993) 110.
- [69] H. Cheng und E.-C. Tsai, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 511.
- [70] P. Arnold und C. Zhai, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 7603; *Phys. Rev.* **D51** (1995) 1906;
C. Zhai und B. Kastening, eprint hep-ph/9507380, Jul. 1995.
- [71] A. Linde, *Phys. Lett.* **B96** (1980) 289.
- [72] M. Achhammer, U. Heinz, S. Leupold und U.A. Wiedemann, in Vorbereitung.
- [73] G. 't Hooft und M. Veltman, *Diagrammar*, CERN Yellow Report 73-9 (1973).
- [74] M. Achhammer, persönliche Mitteilung.
- [75] I.A. Korchemskaya und G.P. Korchemsky, *Phys. Lett.* **B287** (1992) 169;
A. Andraši und J.C. Taylor, eprint hep-th/9601122, Jan. 1996.
- [76] H. Cheng und E.-C. Tsai, *Phys. Lett.* **B176** (1986) 130.
H. Cheng und E.-C. Tsai, *Chinese Journal of Physics* **25** (1987) 95.
- [77] H. Weigert und U. Heinz, *Z. Phys.* **C50** (1991) 195.
- [78] P. Pascual und R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 194 (Springer, Berlin, 1984) 233, C.33.

- [79] T.-P. Cheng und L.-F. Li, Gauge theory of elementary particle physics (Oxford University Press, Oxford, 1988) 219f.
- [80] J.C. Collins, Renormalization (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984).

Danke

Natürlich bin ich nicht alleine „schuld“ daran, daß diese Arbeit zustande kam und wie sie letztendlich geworden ist.

In erster Linie mitverantwortlich ist Ulrich Heinz. Ihm möchte ich vor allem für sein Vertrauen danken sowie für viele klärende und ideenstiftende Gespräche.

Zur Einarbeitung in das Thema und zum Fortgang der Arbeit waren die zahllosen Diskussionen mit Heribert Weigert und Michael Oleszczuk unverzichtbar. Auch ihnen sei dafür gedankt; ebenso Hans-Thomas Elze für die Diskussionen in der Spätphase der Arbeit.

Mehr oder weniger zufällig ergab sich, daß eine von mir ausgegrabene Technik auch für die Arbeiten von Marc Achhammer und Urs A. Wiedemann von Nutzen ist. Die dadurch entstandene Arbeitsgemeinschaft (und Mensa-Gemeinschaft) ist zwar noch nicht beendet, ich bedanke mich aber schon mal vorab für die interessante Zusammenarbeit.

Selbstverständlich sind die fachlichen Diskussionen nicht das einzige, was zum Gelingen einer Arbeit beiträgt. Mindestens ebenso wichtig sind die Stimmung in der Arbeitsgruppe und überhaupt alles, was sich auf zwischenmenschlicher Ebene abspielt. Auch dafür bedanke ich mich bei allen hier genannten und insbesondere bei Christof Stangl für die vielen Gespräche über Physik und Gott und die Welt.

Zur guten Arbeitsatmosphäre maßgeblich beigetragen haben auch Josef Sollfrank, Wolfgang Blümel, Pengfei Zhuang und Boris Tomášik, die dazu verdammt waren, mit mir das Büro zu teilen.

Nicht unerwähnt bleiben sollen die interessanten und/oder lustigen Gespräche mit Rolf Bensel, Pierre Scotto und Uli Mayer. Ebenso bedanke ich mich bei allen anderen momentanen und ehemaligen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe sowie bei allen „Weises“, „Werners“ und „Bracks“. (Dank auch an Richard Wittmann für diese Begriffsbildungen.)

Obwohl sich bestimmt auch in dieser Endfassung viele Druckfehler u.ä. finden, hat Christine Betzner stark zur Reduktion dieser Fehler beigetragen. Auch die Anzahl der verwendeten „alsos“ und „natürlichs“ schmolz unter ihrem kritischen Blick auf ein notwendiges Mindestmaß zusammen.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern für ihre nicht nur finanzielle Unterstützung während meines Studiums bedanken.