

Die k_{\perp} -Faktorisierung in hochenergetischen Streuprozessen

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG
DES DOKTORGRADES
DER NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT.)
DER FAKULTÄT PHYSIK
DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von
Philipp Hägler
aus Regensburg
2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	k_{\perp}-Faktorisierung	11
2.1	Kinematik	11
2.1.1	Multi-Regge-Kinematik	11
2.1.2	Quasi-Multi-Regge-Kinematik	15
3	Der Wirkungsquerschnitt	17
3.1	Topologische Faktorisierung	17
3.2	Berechnung des Wirkungsquerschnittes	20
3.3	Vergleich mit der kollinearen Faktorisierung	26
4	Die Amplitude	31
4.1	Diskussion des Vertex	31
4.1.1	Die Ward-Slavnov-Identität für den effektiven Vertex . .	34
4.1.2	Eichinvarianz	34
4.2	Der kollineare Limes	38
4.3	Erweiterungen für schwere Quarks	40
5	Die unintegrierte Gluonverteilung	43
5.1	Bestimmung der unintegrierten Gluonverteilung aus F_2 -Daten .	43
5.2	Bereich kleiner Transversalimpulse	46
6	Produktion schwerer Quarks	49
6.1	Vorbemerkungen	49
6.2	Erste Vergleiche mit dem Experiment	52
6.3	Vorhersagen für zukünftige Experimente	57
7	Produktion von gebundenen Zuständen	59
7.1	Bezeichnungen	60
7.2	Farbsinglett-Produktionsmechanismus	60
7.3	Produktion von P-Wellen	63
7.3.1	Das Landau-Yang-Theorem	67
7.3.2	Vergleich mit dem Experiment	68
7.4	Lösung des Rätsels der J/Ψ -Produktion?	71
7.4.1	Produktion von S-Wellen	72
7.4.2	Vergleich mit experimentellen Daten zur direkten J/Ψ - Produktion	75

7.5	Farboktett-Produktion und nichtrelativistische QCD	76
7.6	Faktorisierung, COM und COME	77
7.6.1	Führende elektrische und magnetische Übergänge	78
7.6.2	Farbsinglett und -oktett-Beiträge zur S- und P-Wellen- Produktion	79
7.6.3	COME im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung	83
7.6.4	Numerische Auswertung und Anpassung der COME	84
7.7	Produktion polarisierter Quarkonia	88
7.7.1	Produktion polarisierter Quarkonia und Messung der in- tegrierten spinabhängigen Gluonverteilung	88
8	Zusammenfassung	97
8.1	Die physikalischen Grundlagen	97
8.2	Die erzielten Resultate	98
8.3	Bewertung und Kritik	99
9	Ausblick	103

Abbildungsverzeichnis

1-1	Einige Näherungen im Rahmen der QCD	8
1-2	Die QCD und das Konstituenten-Quark-Modell	9
2-1	n-Teilchen Produktion in der Multi-Regge-Kinematik	12
2-2	Verteilung der longitudinalen Impulsanteile	14
2-3	2-Teilchen Cluster in der QMRK	16
3-1	Quark-Antiquark Hadroproduktion	17
3-2	Beispiel für Faktorisierung	19
3-3	Ein anderer faktorisierter Prozess	19
3-4	Quark-Quark-Streuung	20
3-5	Quark-Gluon-Vertex	21
3-6	Die Farb- und Spinstruktur der Amplitude	22
3-7	Ersetzung der Quarklinie durch den Proton-Impaktfaktor	24
3-8	Die Hochenergienäherung für eine Hadronkollision	26
3-9	Amplituden in den zwei Faktorisierungsschemata	28
4-1	Der Quark-Antiquark-Produktionsvertex	32
4-2	Das gekreuzte Diagramm	32
4-3	Der Standard-Beitrag	33
4-4	Der 3-Gluon Vertex	33
4-5	Der effektive Quark-Quark-Gluon-Gluon-Vertex	34
4-6	Der effektive Vertex	35
4-7	Der eichinvariante Quark-Antiquark-Produktionsvertex	38
5-1	Tiefinelastische Streuung	44
5-2	Die unintegrierte Gluonverteilung in der TIS	44
6-1	Rapiditäts-Gaps	50
6-2	Der Prozess im cm-System	50
6-3	Bottom-Quark-Produktion am TeVatron	53
6-4	Bottom-Antibottom-Korrelationen I	55
6-5	Bottom-Antibottom-Korrelationen II	55
6-6	Winkelkorrelationen am $Spp\bar{S}$ -Kollider	56
6-7	Rapiditätsverteilungen für TeVatron II und LHC.	58
6-8	P_{\perp} -Verteilungen für TeVatron II und LHC	58
6-9	Winkelkorrelationen für TeVatron II und LHC	58
7-1	NLO QCD Rechnungen im Vergleich zu Daten vom TeVatron	59

7-2	3S_1 -Farbsinglett-Produktion	64
7-3	Quarkonium-Produktion in führender Ordnung	65
7-4	Das Landau-Yang-Theorem im Fall der Gluonfusion	67
7-5	Diagramme der 3P_1 -Produktion in k_\perp - und kollinearer Faktori- sierung	68
7-6	Ergebnisse für die Quarkonium-Produktion	69
7-7	Die individuellen Beiträge	70
7-8	Die gesuchte NNLLA-Amplitude	72
7-9	Welche Graphen tragen zur J/Ψ -Produktion bei ?	73
7-10	Diagramme der J/Ψ -Produktion	74
7-11	Direkte J/Ψ -Produktion	75
7-12	Gebundener Zustand, der weiche Gluonen absorbiert und abstrahlt	76
7-13	Faktorisierung in der NRQCD	78
7-14	Zusammenhang zu höheren Fockraum-Komponenten	81
7-15	Farboktett-Beiträge	84
7-16	Farboktett-Beiträge zur P -Wellen-Produktion	85
7-17	Farboktett-Beiträge zur S -Wellen-Produktion	86
7-18	Quarkonium-Polarisationen im Vergleich zum Experiment. Die Abbildungen sind der Arbeit [KL00] entnommen.	87
7-19	Das Verhältnis R_{12} in Abhängigkeit der Gluontransversalimpulse	91
7-20	Die Verhältnisse R_{i2} für verschiedene Rapiditäten	92
7-21	Das Verhältnis R_{02} bei einer Rapidität von $y = 0.1$	93
7-22	Produktion polarisierter P -Wellen für verschiedene Rapiditäten	94
8-1	Die Elemente des Quarkonium-Wirkungsquerschnitts	97

1. EINLEITUNG

Seit dem Beginn der großen Erfolge der Quantenelektrodynamik (QED) in den vierziger Jahren erweisen sich Quantenfeldtheorien und quantenfeldtheoretische Methoden als der umfassendste und fundamentalste Zugang zur Beschreibung der vielfältigsten physikalischen Prozesse. Mittlerweile haben sich die Quantenfeldtheorie (QFT) der schwachen Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik und, als rein feldtheoretischer Partner, die allgemeine Relativitätstheorie grundlegend etabliert und bestimmen das derzeitige physikalische Weltbild. Nach wie vor verdient die Frage nach ihrem eigentlichen physikalischen Gehalt jedoch besonders große Aufmerksamkeit.

Die QED, die als Ursprung des erfolgreichen Standardmodells angesehen werden kann, erlaubt es aufgrund ihres abelschen Charakters, in einer bis dahin ungekannten Genauigkeit zum Beispiel das reichhaltige Spektrum der Atome als gebundene Zustände zu verstehen und zu berechnen. Die dabei zum Einsatz kommenden analytischen Lösungsmethoden basieren voll und ganz auf der Störungstheorie, das heißt auf der Entwicklung in der Kopplungskonstanten α_{em} , deren Wert über einen extrem großen kinematischen Bereich praktisch konstant klein $\alpha_{em} \approx 1/137$ ist. Im Zusammenhang damit offenbart die QCD, bedingt durch ihre nicht-abelsche Eichsymmetrie beziehungsweise die Drei- sowie Vier-Gluonen-Wechselwirkungen, eine ungleich kompliziertere Struktur, die sich unter anderem in der besonderen Skalen- oder Auflösungsabhängigkeit der starken Kopplung α_S äußert. Für eine gegebene Skala oder einen Impulsübertrag Q^2 respektive eine räumliche Auflösung $d \propto |Q|^{-1}$ gilt näherungsweise

$$\alpha_S(Q^2) \propto \frac{1}{\ln(\frac{Q^2}{\lambda_{QCD}^2})}, \quad (1.1)$$

wobei die fundamentale QCD-Konstante λ_{QCD} experimentell bestimmt wird und bei etwa $\lambda_{QCD} \cong 100 - 300$ MeV liegt. Wie deutlich zu erkennen ist, bricht die QCD-Störungsreihe bei einem zu niedrigen Auflösungsvermögen, also spätestens bei $Q^2 \sim \lambda_{QCD}^2$, zusammen. In einem Stoß zweier Teilchen lässt sich der Impulsübertrag über $|Q| \approx \sqrt{s}$ auch in Beziehung zur Schwerpunktsenergie \sqrt{s} des Systems setzen. Man erkennt nun deutlich, dass analytische, störungstheoretische Rechnungen in der QCD prinzipiell nur innerhalb bestimmter kinematischer Bereiche beziehungsweise im Rahmen gewisser Grenzen der kinematischen Variablen möglich sind. Diese Tatsachen weisen auf den hohen Anspruch hin, der an die analytische und auch numerische Behandlung der QCD gestellt wird. Letztendlich führen sie aber zu einem großen und reizvollen Spektrum an Lösungsansätzen und -theorien. Eine kleine Auswahl ist in der Abbildung 1-1 zu sehen.

Die Komplexität der QCD verbietet es bislang unter anderem, auf einfache Art und Weise und in einer schlichten Analogie zur QED das Spektrum der Hadronen, der Baryonen und Mesonen, analytisch zu berechnen. In Abbildung 1-2 sind die in diesem Zusammenhang grundlegenden Eigenschaften der QCD

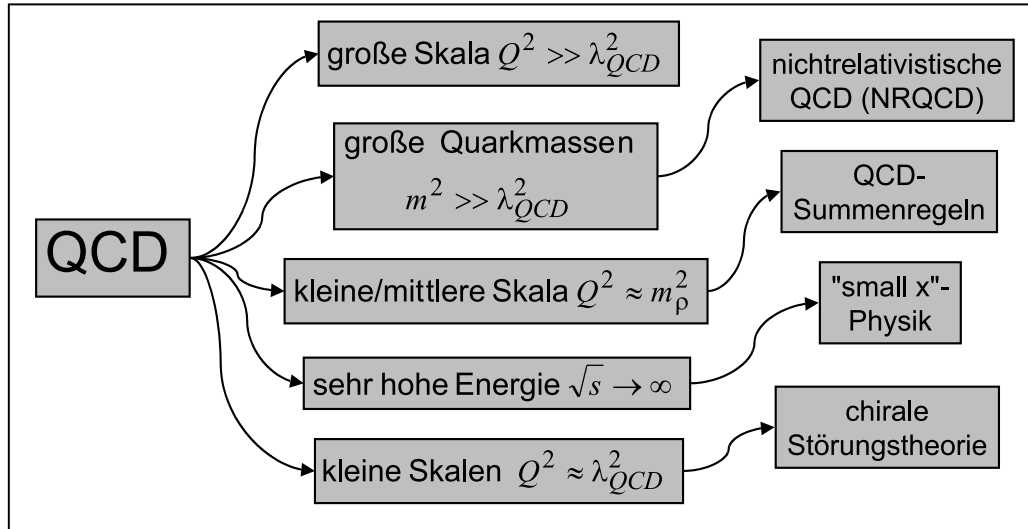


Abb. 1-1 Einige Näherungen im Rahmen der QCD

in Relation zum Konstituenten-Quark-Modell aufgetragen. Die innere dynamische Struktur der Hadronen öffnet sich einer theoretischen Behandlung aus den oben genannten Gründen vielmehr erst durch Anwendung bestimmter Näherungen wie in Abbildung 1-1, die zum Teil nur in sehr speziellen Streuexperimenten realisiert werden können. Das Paradebeispiel für ein solches Experiment ist die tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung am HERA-Speicherring bei Hamburg. In nahezu perfekter Analogie zum Elektronenmikroskop wird dort die Struktur des Protons durch Kollision mit hochenergetischen Elektronen untersucht, wobei die zugehörige räumliche Auflösung $d \propto |Q|^{-1}$ klein genug ist, um sowohl die Quark-Gluon-Struktur der Protonen beobachten zu können, als auch auf theoretischer Seite entsprechend Gleichung (1.1) eine störungstheoretische Behandlung zu erlauben.

In dem bislang populärsten Bild, das man sich von der inneren Struktur des Protons macht, werden die Konstituenten als kollineare und reelle Teilchen behandelt und das Proton durch die Quark- und Gluonverteilungsfunktionen $q(x, Q^2)$ und $g(x, Q^2)$ beschrieben, die von ihrem longitudinalen Impulsbruchteil x vom Protonimpuls abhängen. Die gerade beschriebene Interpretation von Q^2 als räumliche Auflösung impliziert eine starke Q^2 -Abhängigkeit der sogenannten partonischen Verteilungsfunktionen. Abgesehen von seiner Klarheit und Einfachheit erlaubt das Partonmodell vor allem eine in jeder Ordnung Störungstheorie eindeutige Berechnung der zugehörigen Streuamplituden mit Hilfe der Feynman-Regeln. Neben den höheren Ordnungen in α_S spielen dabei Beiträge von höherem Twist, die in der Regel mit Potenzen von $(Q^2)^{-1}$ unterdrückt sind, ebenfalls eine wichtige Rolle.

Ein realistischeres Bild ergibt sich allerdings erst dann, wenn man die Näherungen des Partonmodells aufgibt und die Quarks und Gluonen im Proton weder als kollinear noch reell ansieht. Wie sich zeigt, ist dabei insbesondere die vollständige Mitnahme der intrinsischen Transversalimpulse der Konstituenten von großer Bedeutung. Natürlich ist es zunächst fraglich, ob es im Rahmen dieses allgemeineren Bildes der Protonstruktur überhaupt noch mög-

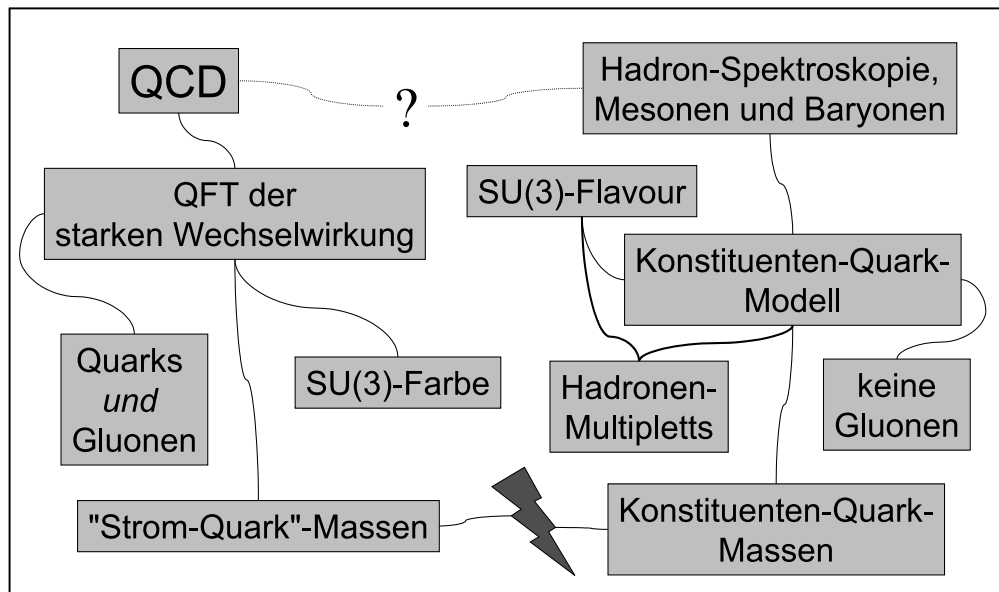


Abb. 1-2 Die QCD und das Konstituenten-Quark-Modell

lich ist, Streuprozesse unter Beteiligung von Protonen bis zu einem gewissen Grad analytisch zu berechnen. Die Untersuchung dieser Frage am Beispiel von Proton-Antiproton-Kollisionen ist ein wesentlicher Aspekt dieser Arbeit, und ihr Ergebnis fällt positiv aus. Die einzige Bedingung, die an den zu beschreibenden Prozess gestellt werden muss, ist, dass er bei sehr hohen Schwerpunktsenergien stattfindet. Aus dieser zentralen Hochenergie-Näherung folgt dann ohne zusätzliche Approximation die sogenannte Quasi-Multi-Regge-Kinematik (QMRK). Der durch die QMRK definierte kinematische Bereich ermöglicht es anschließend im Zusammenhang mit der k_{\perp} -Faktorisierung eine störungstheoretische Berechnung bestimmter Amplituden durchzuführen. Die Rechnungen gestalten sich dabei schwieriger als im Partonmodell, denn ohne die Näherung reeller Partonen sind die zugehörigen Feynman-Regeln alleine nicht mehr ausreichend, die richtigen eichinvarianten Amplituden zu finden. Stattdessen ist es nötig und aufgrund der QMRK überhaupt erst möglich, zu speziellen effektiven Vertices überzugehen. Dabei werden wir ein besonderes Augenmerk auf den eichinvarianten Quark-Antiquark-Produktionsvertex in der QMRK legen, der in dieser Arbeit zum ersten mal direkt phänomenologisch untersucht wird.

Im Rahmen des eben skizzierten Formalismus untersuchen wir die Erzeugung von Bottom-Quarks und Charm-Mesonen. Da die Produktion eines $b\bar{b}$ -Paares ein vergleichsweise sauberer Prozess ist und im Zusammenhang mit unserer Herangehensweise ohne zusätzliche Parameter beschrieben wird, erlaubt der Vergleich zwischen den vorhergesagten Wirkungsquerschnitten der k_{\perp} -Faktorisierung und den experimentellen Daten, zum Beispiel vom Tevatron, eine realistische Einschätzung des phänomenologischen Potentials unseres Ansatzes. Die Berechnung der Produktion von Charm-Mesonen, zum Beispiel dem J/Ψ , Ψ' und χ_c , ist insgesamt etwas involvierter, zieht aber seit vielen Jahren eine besonders große Aufmerksamkeit auf sich. Die sogenannte J/Ψ -Unterdrückung [MS86] innerhalb extrem heißer und dichter Kernmaterie, dem

bislang hypothetischen Quark-Gluon-Plasma (QGP), wird nach wie vor als eine der wichtigsten direkten Signaturen für das Vorhandensein eines QGP in einem hochenergetischen Kern-Kern-Stoß gehandelt. Um sowohl die bereits vorliegenden Daten von den NA38- und NA50-Experimenten am CERN, als auch die in naher Zukunft zu erwartenden ersten Ergebnisse vom RHIC im Hinblick auf das QGP angemessen interpretieren zu können, ist es von grundlegender Bedeutung, den eigentlichen Produktionsmechanismus der Charmonia im Detail verstanden zu haben [Sat01]. Doch wie die Resultate vom TeVatron zur Produktion von Quarkonia zeigen, stößt man bereits bei vergleichsweise elementaren Proton-Proton-Kollisionen zunächst auf große Schwierigkeiten [A⁺97b, Abe], siehe auch Abbildung 7-1. Die theoretischen Rechnungen im Rahmen des Partonmodells und des Farbsinglett-Mechanismus unterschätzen die experimentell bestimmten Wirkungsquerschnitte zum Teil um einen Faktor 50. Zur Lösung dieses Problems wurde der Farboktett-Mechanismus vorgeschlagen, der eine fundierte Begründung in der nichtrelativistischen QCD (NR-QCD) beziehungsweise der NRQCD-Faktorisierung besitzt. Die im Farboktett-Modell auftretenden Parameter in Form der Farboktett-Matrixelemente können so angepasst werden, dass im Falle der Produktion unpolarisierter Quarkonia eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erreicht wird. Neuere Daten vom TeVatron bezüglich polarisierter J/Ψ und Ψ' zeigen aber, dass das zugrundeliegende Berechnungsschema noch nicht korrekt ist. Die Verhältnisse der verschiedenen Farboktett-Matrixelemente, und damit die Polarisierungseffekte, werden falsch vorhergesagt. Da der Farboktett-Mechanismus im Zusammenhang mit der Analyse der J/Ψ -Unterdrückung eine wichtige Rolle einnimmt und zu einer neuen Interpretation der relativen Unterdrückung der verschiedenen Charmonia führt [Sat01], scheint es dringend erforderlich zu sein, zunächst den J/Ψ -Produktionsmechanismus in Proton-Proton-Reaktionen besser zu verstehen. Unserer Analyse zeigt, dass gewisse Farboktett-Beiträge im Vergleich zu den kollinearen Rechnungen massiv reduziert werden und man auf diesem Weg zu einer Übereinstimmung mit den Daten zur Produktion polarisierter Quarkonia kommen kann. Der Einfluss dieser neuen Ergebnisse auf die J/Ψ -Unterdrückung in Kern-Kern-Kollisionen am CERN und am RHIC ist allerdings bislang noch nicht geklärt und berücksichtigt worden.

Während RHIC bei einer cms-Energie pro Nukleon von $\sqrt{s} = 200$ GeV arbeitet, wird es am LHC/CERN bereits möglich sein, Proton-Antiproton- und Kern-Kern-Kollisionen bei $\sqrt{s} = 14$ TeV beziehungsweise $\sqrt{s} = 5$ TeV/Nukleon durchzuführen. Bei diesen Energien steigen die Chancen beträchtlich, in den Schwerionenreaktionen einen Zustand wie das QGP tatsächlich beobachten zu können. Nicht zuletzt wird dann auch die in dieser Arbeit verwendete und untersuchte Hochenergie-Näherung und damit die QMRK als Grundlage von Rechnungen im Rahmen der QCD eine immer größere Bedeutung gewinnen.

2. K_{\perp} -FAKTORISIERUNG

2.1 Kinematik

2.1.1 Multi-Regge-Kinematik

Wie in der Einleitung bereits beschrieben ist es notwendig, bestimmte Näherungen durchzuführen, um im Rahmen der QCD wenigstens approximative analytische Rechnungen ausarbeiten zu können. Die Multi-Regge-Kinematik (MRK) ist das Ergebnis einer solchen möglichen Näherung. Der im folgenden betrachtete kinematische Bereich, der zur MRK und anschließend auch zur Quasi-Multi-Regge-Kinematik (QMRK) führt, dient der Beschreibung hoch-energetischer Streuprozesse. Damit sind Reaktionen gemeint, bei denen die Schwerpunktsenergie \sqrt{s} der Teilchen wesentlich größer als ihre Ruhemasse ist, $\sqrt{s} \gg m$. Formal wird sogar angenommen, dass man im Grenzfall unendlich großer Energie $s \rightarrow \infty$ arbeitet.

Die Frage, inwiefern diese Approximation und deren Folgen tatsächlich eine gute Näherung an das Experiment liefert, ist unter anderem Inhalt dieser Arbeit. Sicher ist, dass wir uns auf die Beschreibung derjenigen Experimente beschränken müssen, die derzeit die höchsten Schwerpunktsenergien (pro Teilchen) zur Verfügung stellen. Konkret sind das Experimente am TeVatron (Fermilab) und dem RHIC (Brookhaven), beide USA, sowie am $SppS$ (CERN). Es ist zu erwarten, dass die (Q)MRK mit steigenden Energien zunehmend an Bedeutung gewinnen wird. Insbesondere sind die geplanten Experimente am LHC (CERN) geradezu prädestiniert für eine solche Beschreibung.

In diesem Abschnitt wird die Hochenergienäherung formal untersucht und aus ihr die MRK abgeleitet. Die Rechnungen folgen denen von Halliday und Saunders [Hal68], mit dem Unterschied, dass von Anfang an keine Sudakov-Parameter [Sud56] sondern Lichtkegelkoordinaten (LKK) [Har] zum Einsatz kommen.

Wir betrachten einen Stoßprozess von 2 hochenergetischen Teilchen, bei dem n Teilchen produziert werden (siehe Abbildung 2-1). Zur Beschreibung dieses Prozesses werden die Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &\equiv (P_1 + P_2)^2, \\ s_i &\equiv (k_i + k_{i+1})^2, \\ t_i &\equiv (P_1 - k_1 - k_2 - \dots - k_i)^2 = q_i^2 \end{aligned}$$

verwendet. Weiterhin wählen wir das center-of-mass-Bezugssystem (CMS), in dem

$$P_1 = (E, 0_{\perp}, E), P_2 = (E, 0_{\perp}, -E)$$

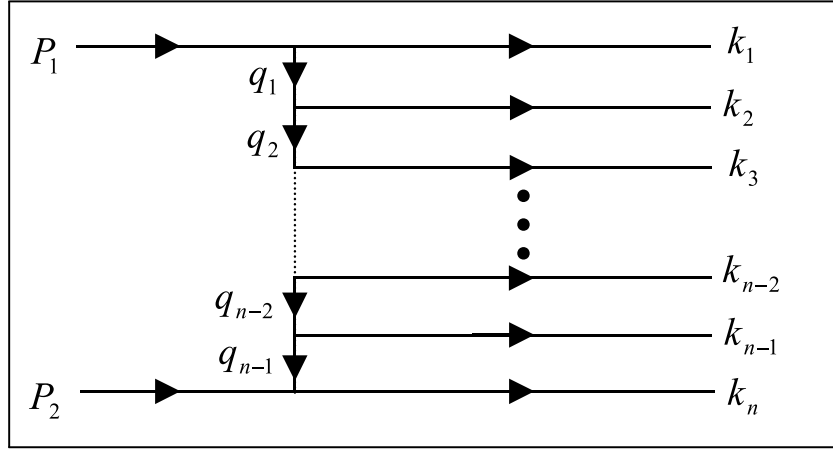


Abb. 2-1 n-Teilchen Produktion in der Multi-Regge-Kinematik

gilt, wobei wir unter der Annahme $E = \sqrt{s}/2 \gg m$ die Teilchenmasse m der hereinlaufenden Teilchen vernachlässigen. Mit Hilfe der linear unabhängigen Lichtkegelvektoren n^+, n^- ($n^{+2} = n^{-2} = 0$)

$$n^+ \equiv \frac{P_2}{E}, n^- \equiv \frac{P_1}{E}$$

kann nun jeder beliebige 4er-Vektor auf eindeutige und elegante Art parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} P_i^+ n^- + \frac{1}{2} P_i^- n^+ + P_{i\perp}, \\ k_i &= \frac{1}{2} k_i^+ n^- + \frac{1}{2} k_i^- n^+ + k_{i\perp}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Man beachte, dass n^+ und n^- 4er-Vektoren sind, während P_i^+ etc. Komponenten von Vektoren bezeichnen. Nach Voraussetzung verschwinden die transversalen Impulse der hereinlaufenden Teilchen $P_{i\perp} = 0$, und für ihre longitudinalen Anteile gilt mit $P_i^{+/-} = n^{-/+} \cdot P_i$

$$\begin{aligned} P_1^+ &= \sqrt{s} = P_2^-, \\ P_1^- &= P_2^+ = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei entsprechen die transversalen \perp sowie die longitudinalen $+/-$ Komponenten exakt den entsprechenden LKK. Energie-Impuls-Erhaltung liefert sofort den Satz von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= k_1 + k_2 + \dots + k_n = \left(\sum k_i^+ \right) \frac{n^-}{2} + \left(\sum k_i^- \right) \frac{n^+}{2} + \sum k_{i\perp} \\ \Rightarrow \sum k_i^+ &= \sum k_i^- = \sqrt{s} = P_1^+ = P_2^-, \quad \sum k_{i\perp} = 0. \end{aligned}$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die produzierten und vom Stoßzentrum fortlaufenden Teilchen wechselwirkungsfrei sind und somit auf der Massenschale

liegen. Zur weiteren Vereinfachung sollen ihre Massen fürs erste vernachlässigbar sein. Dann gilt

$$k_i^2 = 0 = \frac{k_i^+ k_i^-}{2} + k_{i\perp}^2 \quad (\text{keine Summation über } i). \quad (2.3)$$

Da $k_{i\perp}^2 = -\mathbf{k}_{i\perp}^2 \leq 0$ haben wir mit (2.1) und (2.3) (man beachte, dass $k_i^0 = E_i \geq 0$)

$$k_i^+ \geq 0, k_i^- \geq 0. \quad (2.4)$$

Sämtliche longitudinalen LKK sind also positiv. Die Mandelstam-Variablen können nun vollständig durch die LKK ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{2} (k_i^+ + k_{i+1}^+) (k_i^- + k_{i+1}^-) + (k_{\perp i} + k_{\perp i+1})^2, \\ t_i &= -\frac{1}{2} \left(P_1^+ - \sum_{j=1}^i k_j^+ \right) \left(\sum_{j=1}^i k_j^- \right) + \left(\sum_{j=1}^i k_{\perp j} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Um die Gleichungen übersichtlich zu halten, ist es günstig, an dieser Stelle neue Variablen zu definieren

$$\begin{aligned} K_i^+ &\equiv P_1^+ - \sum_{j=1}^i k_j^+ \geq 0, \quad K_0^+ \equiv P_1^+, \\ K_i^- &\equiv \sum_{j=1}^i k_j^- \geq 0, \quad K_0^- \equiv 0, \end{aligned}$$

wobei wegen Gleichung (2.4) K_i^+ eine monoton fallende und K_i^- eine monoton steigende Folge ist. Damit vereinfacht sich (2.5) zu

$$s_i = \frac{1}{2} (K_{i-1}^+ - K_{i+1}^+) (K_{i+1}^- - K_{i-1}^-) + (k_{\perp i} + k_{\perp i+1})^2, \quad (2.6)$$

$$t_i = -\frac{1}{2} K_i^+ K_i^- + \left(\sum_{j=1}^i k_{\perp j} \right)^2. \quad (2.7)$$

Jetzt ist es an der Zeit, die Forderung nach einer hochenergetischen Streuung mathematisch zu formulieren. Die zentralen Annahmen lauten

$$s \xrightarrow{!} \infty \text{ und } s_i \xrightarrow{!} \infty \text{ und } \frac{s_i}{t_i} \xrightarrow{!} \infty, \quad (2.8)$$

das heißt die t_i bleiben *endlich*. Man beachte an dieser Stelle, dass die Forderungen an die lorentzinvarianten Mandelstam-Variablen gestellt werden, und es im allgemeinen keine Beschränkung auf ein bestimmtes Bezugssystem gibt. Wir wollen sehen, was in der kinematischen Region (2.8) an Vereinfachungen erreicht werden kann. Zunächst folgt aus Gleichung (2.7), dass mit den t_i auch die $k_{\perp i}^2$ endlich bleiben, denn die beiden Terme auf der rechten Seite von (2.7) sind negativ, also ist auch

$$\tau_i \equiv \frac{1}{2} K_i^+ K_i^- = -t_i + \left(\sum_{j=1}^i k_{\perp j} \right)^2 \quad (2.9)$$

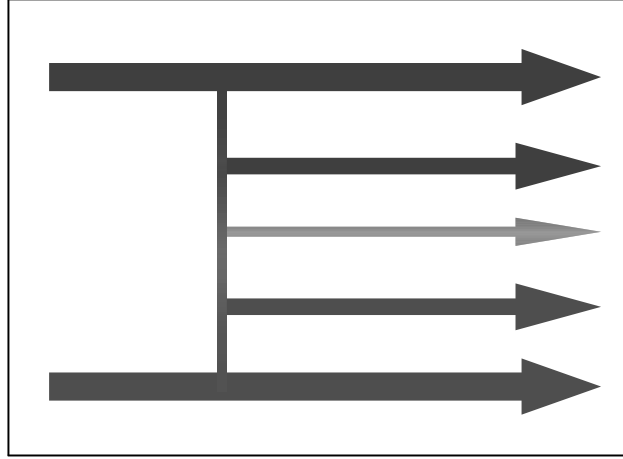


Abb. 2-2 Verteilung der longitudinalen Impulsanteile

endlich. Das bedeutet für Gleichung (2.6)

$$s_i \approx \frac{1}{2} (K_{i-1}^+ - K_{i+1}^+) (K_{i+1}^- - K_{i-1}^-) \rightarrow \infty,$$

was wir mit (2.9) schließlich umformen können in

$$s_i \approx \frac{1}{2} (K_{i+1}^+ K_{i-1}^- + K_{i-1}^+ K_{i+1}^-) \rightarrow \infty.$$

Da die beiden Folgen K_i^+ und K_i^- aber monoton fallend beziehungsweise steigend sind, gilt sogar

$$s_i \approx \frac{1}{2} K_{i-1}^+ K_{i+1}^- \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Ähnliche Umformungen können auch mit Gleichung (2.3) durchgeführt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} -k_{i\perp}^2 &= \frac{1}{2} (K_{i-1}^+ - K_i^+) (K_i^- - K_{i-1}^-) \\ &= \frac{1}{2} (K_{i-1}^+ K_i^- + K_i^+ K_{i-1}^-) - \tau_i - \tau_{i-1}, \end{aligned}$$

das heißt $K_{i-1}^+ K_i^-$ und $K_i^+ K_{i-1}^-$ sind endlich. Mit Gleichung (2.10) folgt daraus natürlich (für $i \neq 0, n$)

$$\frac{K_{i+1}^-}{K_i^-} \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \frac{K_{i-1}^+}{K_i^+} \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Um einen anschaulichen und interpretierbaren Ausdruck zu erhalten, betrachten wir

$$\frac{k_i^+ - k_{i+1}^+}{K_i^+} = \frac{K_{i-1}^+}{K_i^+} + \dots \rightarrow \infty$$

(etwas ähnliches gilt auch für die $-$ -Komponenten) und finden damit das wichtige Ergebnis

$$\begin{aligned} k_i^+ &\gg k_{i+1}^+, \\ k_i^- &\ll k_{i+1}^-. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die $+$ beziehungsweise $-$ Komponenten (die longitudinalen Anteile) der Impulse der auslaufenden Teilchen sind also streng geordnet. Dieses Ergebnis stellt einen wichtigen Aspekt der Multi-Regge-Kinematik dar. Was passiert aber mit den transversalen Komponenten? Dazu werfen wir nochmal einen Blick auf Gleichung (2.9)

$$\tau_i \equiv \underbrace{\frac{1}{2} K_{i-1}^+ K_i^-}_{\text{konst.}} \frac{K_i^+}{K_{i-1}^+} \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

und finden, dass die Quadrate der Impulsüberträge t_i im Regge-Grenzfall rein transversal sind. Zusammengenommen ergibt sich eine Situation wie in Abbildung 2-2 angedeutet. Die großen longitudinalen Impulse P_1^+ und P_2^- der einlaufenden Teilchen verteilen sich in streng geordneter Weise (Gleichung (2.12)) auf die produzierten auslaufenden Teilchen, tragen aber kaum zu den Impulsüberträgen im t -Kanal bei.

Die Impulse der Teilchen im t -Kanal q_i können selbstverständlich auch in der Form (2.1) parametrisiert werden

$$q_i = \frac{1}{2} q_i^+ n^- + \frac{1}{2} q_i^- n^+ + q_\perp.$$

Impulserhaltung am Vertex liefert durch einen Vergleich mit (2.1) die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} q_i^+ &= K_i^+, \\ q_i^- &= -K_i^-, \\ q_{i\perp} &= -\sum_{j=1}^i k_{j\perp}. \end{aligned}$$

Mit (2.11) ergibt sich daraus ohne Umwege eine strenge Ordnung der longitudinalen Komponenten der Impulse im t -Kanal

$$\begin{aligned} q_i^+ &\gg q_{i+1}^+, \\ q_i^- &\ll q_{i+1}^-. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Ergebnisse aus Gleichung (2.11) und Gleichung (2.14) werden bei der späteren Berechnung von Wirkungsquerschnitten eine elementare Rolle spielen.

2.1.2 Quasi-Multi-Regge-Kinematik

Die Quasi-Multi-Regge-Kinematik resultiert aus einer sehr einfachen Aufweichung (daher 'Quasi-') der zentralen Forderung (2.8) beziehungsweise den Ungleichungen (2.11) und (2.14). Es wird einem Paar von benachbarten Impulsen

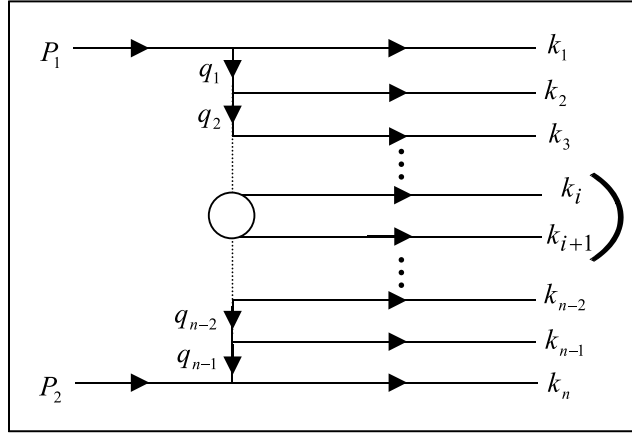


Abb. 2-3 2-Teilchen Cluster in der QMRK

k_i und k_{i+1} erlaubt, nicht streng geordnete longitudinale LKK zu besitzen. Es gibt dann maximal einen Index i , so dass

$$\begin{aligned} k_i^+ &\sim k_{i+1}^+ \\ k_i^- &\sim k_{i+1}^- \end{aligned} \quad (2.15)$$

In der QMRK ist es daher möglich, dass zwei Teilchen 'clustern' (Abbildung 2-3), anstatt gemäß Gleichung (2.11) wegen der sehr unterschiedlichen longitudinalen Impulskomponenten auseinanderzulaufen. Das ist natürlich physikalisch sinnvoll und notwendig, wenn zum Beispiel gebundene Quark-Antiquark-Zustände, also Mesonen, in einem solchen Hochenergie-Streuprozess erzeugt werden.

3. DER WIRKUNGSQUERSCHNITT

Ein zentrales Anliegen dieser Arbeit ist die Untersuchung der Erzeugung von einem Quark-Antiquark-Paar $q\bar{q}$ in einer hochenergetischen Proton-Proton-Kollision¹. Die Gleichung für den Wirkungsquerschnitt einer solchen Reaktion in der sogenannten k_\perp -Faktorisierung lautet

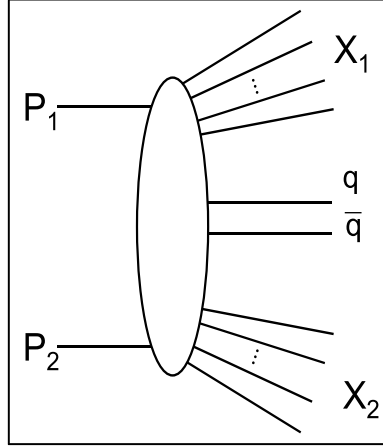


Abb. 3-1 Quark-Antiquark Hadroproduktion

$$\sigma_{P_1 P_2 \rightarrow q\bar{q} X} = \frac{1}{16 (2\pi)^4} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^+} \frac{d^3 k_2}{k_2^+} d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp} \delta^2 (q_{1\perp} - q_{2\perp} - k_{1\perp} - k_{2\perp}) \times \frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{(q_{1\perp}^2)^2} \frac{A^{\dagger c_2 c_1} A^{c_2 c_1}}{(N_c^2 - 1)^2} \frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{(q_{2\perp}^2)^2}. \quad (3.1)$$

Der Ursprung dieser Gleichung und ihre einzelnen Elemente werden im folgenden Abschnitt genauer erläutert und interpretiert.

3.1 Topologische Faktorisierung

Gleichungen der Art (3.1) werden von zahlreichen Autoren [CCH91a, LRSS91, SS01, RSS01] angegeben und verwendet, ohne dass eine Herleitung explizit gezeigt oder skizziert wird. Tatsächlich müsste dazu bewiesen werden, dass der betrachtete Prozess (Abbildung 3-1) *faktorisiert*. Faktorisierungsbeweise gehören allerdings zu den komplizierteren Unternehmungen in der Streutheorie, und

¹oder einer Proton-Antiproton-Kollision (die elektromagnetische bzw. schwache Wechselwirkung spielt bei den betrachteten Energien vernachlässigbare Rolle)

der Status des Beweises der k_{\perp} -Faktorisierung ist zudem niedriger einzustufen als im Falle der sogenannten kollinearen Faktorisierung. Wir beschränken uns aus diesem Grund darauf, die praktische Bedeutung der Faktorisierung zu verstehen, und werden Gleichung (3.1) weiter unten unter Annahme der Faktorisierung herleiten.

Die erste und wesentliche Idee bei dem Vorhaben, einen Streuprozess theoretisch zu beschreiben, liegt darin, die ein- und auslaufenden Teilchen als frei zu betrachten. Sie genügen also asymptotisch (lange vor beziehungsweise nach dem eigentlichen Streuprozess) den freien Bewegungsgleichungen und liegen damit auf der Massenschale. Natürlich ist das eine Näherung, denn spätestens im Detektor gibt es Wechselwirkungen, da eine Messung per definitionem eine Wechselwirkung ist. Die Qualität und Berechtigung der Annahme asymptotisch freier Teilchen steht bei den betrachteten Energien aber völlig außer Frage.

Als nächstes ist zu überlegen, ob die asymptotischen Teilchen punktförmig sind (zum Beispiel Elektronen) oder eine innere Struktur (wie zum Beispiel das Proton) besitzen. Sind sie punktförmig, entsprechen sie in der Regel genau definierten und bekannten Zuständen der zugrunde liegenden Quantenfeldtheorie, und der gesamte Apparat der S -Matrix- und Störungstheorie kann ohne Umwege zur Anwendung kommen. In diesem Fall ist die Faktorisierung relativ einfach und besteht aus der Zerlegung des Prozesses in elementare n -Teilchen-Vertices in Form von Feynman-Diagrammen².

Besitzen die ein- und/oder auslaufende Teilchen allerdings eine innere Struktur, handelt es sich dabei also im Grunde um gebundene Zustände punktförmiger Teilchen, und sind die anderen beteiligten Teilchen energiereich genug, um diese innere Struktur zu sehen respektive aufbrechen zu können, ist die Anwendung von elementaren Feynman-Regeln zunächst nicht möglich. An dieser Stelle setzt die eigentlich Faktorisierung ein. Wie bereits angekündigt ist es möglich, unter gewissen kinematischen Bedingungen die Wirkungsquerschnitte solcher Prozesse mit nicht-elementaren Teilchen als Produkte (daher 'Faktorisierung') wohldefinierter Größen aufzuschreiben. Rein schematisch ist das in Abbildung 3-2 zu erkennen.

Die beiden von links hereinlaufenden gebundene Zustände produzieren den auf der rechten Seite in der Mitte herauslaufenden gebundenen Zustand (plus viele weitere Teilchen, die in diesem Fall uninteressant sind und über die integriert wird). Die Faktorisierung erlaubt es, den Wirkungsquerschnitt (nicht die Amplitude des Prozesses) in drei unabhängige Anteile zu zerlegen. Im einzelnen ist das die Struktur des einlaufenden gebundenen Zustands, die durch \mathcal{F} gegeben sei, die Struktur des auslaufenden gebundenen Zustands, mit \mathcal{M} bezeichnet, und zuletzt die eigentliche (harte) Amplitude H beziehungsweise ihr Betragsquadrat $H^{\dagger}H$

$$\sigma \propto \mathcal{M} \times \mathcal{F} \times H^{\dagger}H \times \mathcal{F}. \quad (3.2)$$

Die harte Amplitude kann hier mit Hilfe der entsprechenden Feynman-Regeln berechnet werden, wohingegen \mathcal{F} und \mathcal{M} in der Regel nicht explizit bestimmt

²Das gilt nur, wenn Störungstheorie im Sinne einer Entwicklung in der Kopplungskonstanten möglich ist.

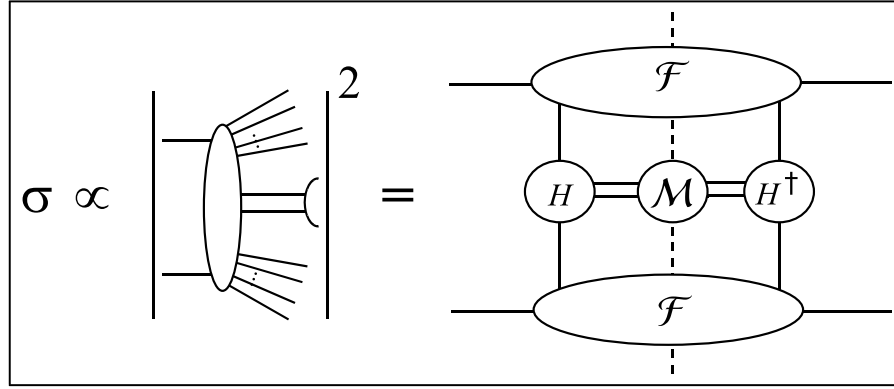


Abb. 3-2 Beispiel für Faktorisierung

werden können, sondern die gebunden Zustände parametrisieren. Die wahrscheinlich wichtigste Eigenschaft der Faktorisierung liegt darin, dass die Funktionen \mathcal{M} und \mathcal{F} universell sind und nicht vom einzelnen Prozess abhängen. Wir können mit den gleichen Funktionen zum Beispiel auch einen Streuprozess zwischen einem gebunden Zustand und einem elementaren Teilchen beschreiben (Abbildung 3-3). Im späteren Verlauf der Untersuchungen wird die Universalität der Funktionen \mathcal{M} und \mathcal{F} noch eine wichtige Rolle spielen.

Im Verlauf des Beweises der Faktorisierung eines bestimmten Prozesses treten typischerweise bei der Berechnung der zum Prozess zugehörigen Diagramme infrarote Divergenzen auf. Ob die Faktorisierung gelingt oder nicht hängt dann ganz entscheidend davon ab, ob es möglich ist, diese Divergenzen in einer eindeutigen Art und Weise der inneren Struktur des gebundenen Zustands zuzuschreiben und sie auf diesem Weg von der eigentlichen harten Streuamplitude zu separieren. Der bei diesem Vorgehen auftretende Infrarot-Cutoff μ^2 wird dann auch als Faktorisierungs-Skala μ_F^2 bezeichnet und gibt an, bei welcher Skala die nichtperturbative und die perturbative Physik getrennt werden. Im Zusammenhang mit der noch zu diskutierenden kollinearen Faktorisierung

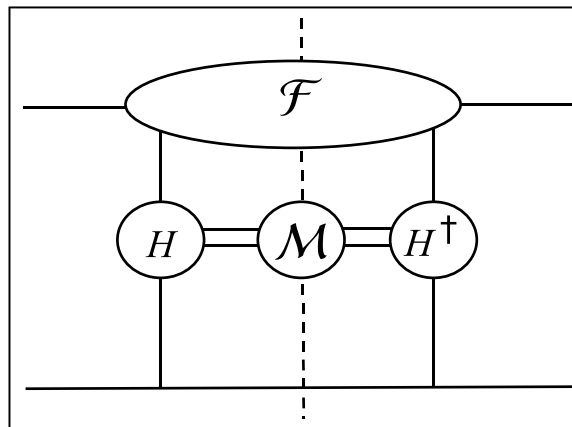


Abb. 3-3 Ein anderer faktorisierte Prozess

identifiziert man die Faktorisierungs-Skala in der Regel mit der typischen harten Skala $Q^2 > \lambda_{QCD}^2$ des Streuprozesses.

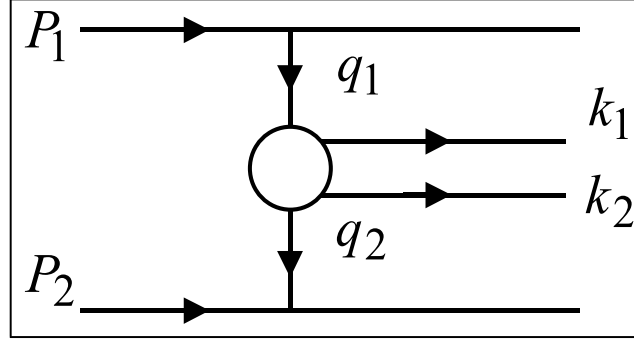


Abb. 3-4 Quark-Quark-Streuung

3.2 Berechnung des Wirkungsquerschnittes

Zunächst wird das Diagramm des Prozesses in Abbildung 3-1 vereinfacht, indem die Protonen, die aufgrund ihrer komplexen Struktur einer analytischen Behandlung nicht direkt zugänglich sind, durch Quarklinien ersetzt werden (Abbildung 3-4). Die weitere Strategie sieht vor, alle Strukturen, die spezifisch für die einlaufenden Quarks sind, zu separieren und durch Funktionen zu ersetzen, die die Protonstruktur beschreiben.

Der Wirkungsquerschnitt des $2 \rightarrow 4$ Prozesses aus Abbildung 3-4 lautet [Mut85]

$$\sigma_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'} = \frac{1}{2s} \frac{1}{4} \sum \int d(P S^4) A_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'}^\dagger A_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'} \quad (3.3)$$

Dabei ist $1/(2s)$ ein Flussfaktor, und $\frac{1}{4} \sum$ steht für die Mittelung über die einlaufenden und Summierung über die auslaufenden Spins. Der Phasenraum ist durch

$$d(P S^4) = \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^2 P'_1 d^2 P'_2}{((2\pi)^3)^4 2k_1^0 2k_2^0 2P_1'^0 2P_2'^0} (2\pi)^4 \delta^4(P'_1 - P'_2 - k_1 - k_2) \quad (3.4)$$

gegeben. Die zentrale Größe ist die Übergangsamplitude $A_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'}$, die von den beteiligten Impulsen und Polarisationen abhängt, was der Übersicht halber nicht explizit angegeben wurde. Durch einen Vergleich zwischen Abbildung 2-3 und Abbildung 3-4 wird deutlich, dass die Ergebnisse aus dem Abschnitt über die Multi-Regge-Kinematik (MRK) beziehungsweise Quasi-MRK (QMRK) an dieser Stelle verwendet werden können, wenn $\sqrt{s} = P_1^+ = P_2^-$ nur groß genug ist, um die zentralen Forderungen (2.8) zu erfüllen, was im weiteren vorausgesetzt wird. Gleichung (3.4) wird nun durch Substitution auf die Variablen k_1 , k_2 , q_1 und q_2 umgeschrieben und anschließend durch deren Lichtkegelkomponenten ausgedrückt. Die Anwendung der QMRK, also der Gleichung (2.14) und Gleichung (2.15), ergibt für den Phasenraum schließlich

$$d(P S^4) = \frac{1}{4s} \frac{d^3 k_1 d^3 k_2 d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp}}{(2\pi)^8 2k_1^+ 2k_2^+} \delta^2(q_{1\perp} - q_{2\perp} - k_{1\perp} - k_{2\perp}). \quad (3.5)$$

Wir wenden uns nun der Übergangsamplitude $A_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'}$ zu und werden überlegen, wie weit ihre Struktur mit Hilfe der QMRK zerlegt und vereinfacht werden kann. Zunächst ist festzuhalten, dass die Teilchen mit den Impulsen q_1 und q_2 im t-Kanal in Abbildung 3-4 noch gar nicht näher spezifiziert sind. Im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik kommen dafür alle Teilchen in Betracht, die eine Wechselwirkung vermitteln, das heißt sämtliche Eichbosonen. Das Photon γ und die schweren intermediären Vektorbosonen W^+ , W^- und Z^0 koppeln im Vergleich zum Gluon g aber nur minimal an die Quarks, jedenfalls solange wir in der QMRK arbeiten und der Impulsübertrag $t = -|\mathbf{q}_\perp|^2$ viel kleiner als die Massen der Vektorbosonen W^\pm und Z der schwachen Wechselwirkung ist. Daher ist es eine gute Näherung, von einer gluonischen Wechselwirkung zwischen den beiden Quarks P_1 und P_2 auszugehen. Der Quark-Gluon-Vertex aus Abbildung 3-5 lässt sich in der QMRK stark vereinfachen. Um das zu sehen, kann man zum Beispiel eine explizite Darstellung der Quarkspinoren verwenden [Har], und findet

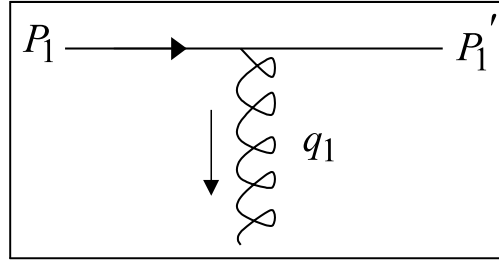


Abb. 3-5 Quark-Gluon-Vertex

$$\begin{aligned} \bar{u}(P_1 - q_1) \gamma^+ u(P_1) &\propto P_1^+ \\ \bar{u}(P_1 - q_1) \gamma^- u(P_1) &= 0 \\ \bar{u}(P_1 - q_1) \gamma_\perp u(P_1) &\propto q_{1\perp}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nun ist $|\mathbf{q}_{1\perp}| = \sqrt{|t|} \ll \sqrt{s} = P_1^+$, also liefert der erste Ausdruck der Gleichungen (3.6) mit $\gamma^\mu \rightarrow \gamma^+$ in der QMRK den dominanten Beitrag. Dieses Ergebnis lässt sich leicht auf andere Kopplungen wie den 3-Gluonen-Vertex übertragen, siehe dazu [FR]. Generell findet man in der QMRK, dass nur die + beziehungsweise - Komponenten der Vektorteilchen im t-Kanal beitragen. Dieses Resultat wird in der Anwendung auf die Berechnung von Streuprozessen als Eikonal-Approximation bezeichnet. Eine etwas andere Begründung der Eikonal-Näherung basiert darauf, dass die Komponenten von q_1 aufgrund der MRK klein sind gegenüber \sqrt{s} , und deshalb im Argument des Spinors q_1 gegenüber P_1 vernachlässigt werden kann

$$\bar{u}(P_1 - q_1) \gamma^\mu u(P_1) \approx \bar{u}(P_1) \gamma^\mu u(P_1) \propto P_1^\mu. \quad (3.7)$$

Hier ist aber etwas Vorsicht geboten, denn auch wenn die + Komponente von P_1 viel größer ist als die vom Gluon, $P_1^+ \gg q_1^+$, sind die transversalen Komponenten der einlaufenden Quarks nach Voraussetzung identisch Null,

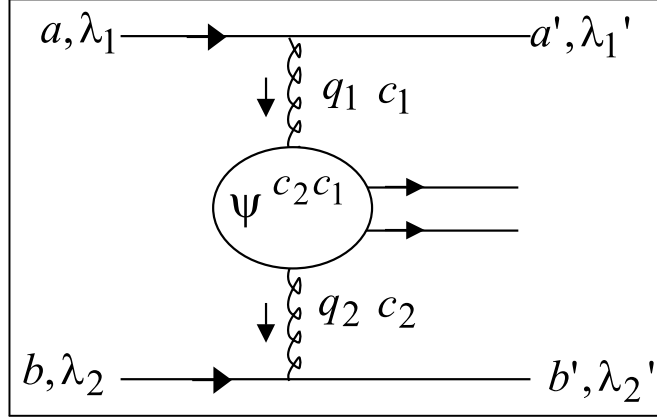


Abb. 3-6 Die Farb- und Spinstruktur der Amplitude

$P_{1\perp} = 0 \leq |\mathbf{q}_{1\perp}|$! Wie man sieht, laufen die Gleichungen (3.6) und (3.7) trotzdem auf das gleiche Ergebnis hinaus. Nun sind wir in der Lage, die Amplitude $A_{qq \rightarrow q' q \bar{q} q'}$ genauer zu beschreiben. Mit den Definitionen aus Abbildung 3-6 erhält man den Ausdruck

$$A_{q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q \bar{q} q'_2} = -s g^2 T_{a'a}^{c_1} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \frac{1}{q_{1\perp}^2} A^{c_2 c_1} \frac{1}{q_{2\perp}^2} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} T_{b'b}^{c_2}. \quad (3.8)$$

Neben den Farbfaktoren T_{ij}^c , den Kroneckerdeltas für die Quarkspins $\delta_{\lambda' \lambda}$ und den Gluonpropagatoren $(q_\perp^2)^{-1}$ enthält Gleichung (3.8) als zentrale Größe die Quark–Antiquark-Produktionsamplitude $A^{c_2 c_1}$. Die Amplitude $A^{c_2 c_1}$ beziehungsweise der zugehörige Vertex $\psi^{c_2 c_1}$ spielen im Rahmen dieser Arbeit eine große Rolle. Wir werden sie in einem der nächsten Abschnitte im Zusammenspiel mit der QMRK ausführlich diskutieren. Für die Gluonpropagatoren haben wir die Feynman-Eichung gewählt. Wegen den Gleichungen (3.6) ergibt sich für den Zähler des Propagators allerdings $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{+\nu}$, so dass nur $\nu = -$ einen Beitrag liefert. Der Grenzwert sehr hoher Energien läuft gemäß der QMRK an dieser Stelle also auf die Näherung

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n_\mu^+ n_\nu^- + \frac{1}{2} n_\mu^- n_\nu^+ + g_{\perp\mu\nu} \approx \frac{1}{2} n_\mu^+ n_\nu^- \quad (3.9)$$

hinaus. Die Interpretation der Gleichung (3.9) wird sofort deutlich, wenn man sich den Zusammenhang des Zählers des Gluonpropagators mit dem Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(q, \lambda)$ des Gluons im t -Kanal ins Gedächtnis ruft:

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(q, \lambda) \epsilon_\nu(q, \lambda) \propto g_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} n_\mu^+ n_\nu^-. \quad (3.10)$$

Die Gluonen im t -Kanal sind in der QMRK also longitudinal polarisiert. Gleichung (3.9) kann auch als Ausgangspunkt für die Eikonal-Approximation verwendet werden.

Im Hinblick auf den Wirkungsquerschnitt (3.1) ist es an dieser Stelle sinnvoll, die Farbstruktur der quadrierten Amplitude näher zu betrachten. Gleichung (3.8) führt zu dem Ausdruck

$$A_{q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q \bar{q} q'_2}^\dagger A_{q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q \bar{q} q'_2} \propto \left(T^{c'_1} T^{c_1} \right)_{a'a} \left(T^{c'_2} T^{c_2} \right)_{b'b}.$$

Um auf einen Farbsinglett-Zustand im t -Kanal zu projizieren, geht man am besten folgendermaßen vor: In Analogie zur Entwicklung eines Vektors \mathbf{v} in einem vollständigen Orthogonalsystem \mathbf{x}^j werden die Farbmatriizen $T^{c'}T^c$ in den Farbstrukturen $\delta^{c'c}, f^{c'ca} \dots$ entwickelt,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_j (\mathbf{x}^j, \mathbf{v}) \mathbf{x}^j \Rightarrow \\ T^{c'_1}T^{c_1} &= N_1 Sp(TT\delta) \delta^{c'_1 c_1} + N_2 \left(\propto f^{c'_1 c_1 a} \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Spur in Gleichung (3.11) ist durch $Sp(TT\delta) \equiv \sum_{a,b} T^a T^b \delta^{ba}$ definiert, und für den Normierungsfaktor N_1 des Farbsinglettanteils findet man

$$N_1 = \frac{1}{Sp(\delta\delta)} = \frac{1}{N_c^2 - 1}.$$

Die Projektion auf einen Farbsinglettzustand im t -Kanal entspricht zusammengekommen also der Ersetzung

$$T^{c'_1}T^{c_1} \rightarrow \frac{1}{N_c^2 - 1} \delta^{c'_1 c_1} Sp(TT\delta). \quad (3.12)$$

Gleichung (3.8) und Gleichung (3.12) ergeben zusammen einen vollständigen Ausdruck für das Amplitudenquadrat

$$\begin{aligned} A_{q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q \bar{q} q'_2}^\dagger A_{q_1 q_2 \rightarrow q'_1 q \bar{q} q'_2} &= s^2 g^4 (\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2})^2 (Sp(TT\delta))^2 \\ &\times \frac{1}{(q_{1\perp}^2)^2} \left\{ \frac{A^{\dagger c_2 c_1} A^{c_2 c_1}}{(N_c^2 - 1)^2} \right\} \frac{1}{(q_{2\perp}^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Im Hinblick auf die eigentliche Faktorisierung ist es wichtig, diejenigen Anteile der Amplitude (3.13) zu identifizieren, die charakteristisch für die einlaufenden Quarks in Abbildung 3-6 sind. Vereinfacht gesprochen gehören dazu alle vom Quark-Gluon-Vertex 3-5 stammenden Anteile, also die Farbstruktur

$$(Sp(TT\delta))^2 = \left(\frac{1}{2} \frac{N_c^2 - 1}{N_c} \right) \mathbf{1}_{N_c \times N_c} \otimes \mathbf{1}_{N_c \times N_c},$$

die Kopplungskonstanten g^4 und die Kroneckerdeltas der Quarkspins

$$(\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2})^2.$$

Im folgenden nehmen wir an, dass der Prozess in Abbildung 3-1 faktorisiert und ersetzen gemäß Abbildung 3-7 die Quarklinien durch sogenannte Proton-Impakt-Faktoren $\Phi_P(q)$.

In Gleichungen ausgedrückt bedeutet das

$$\begin{aligned} g^2 Sp(TT\delta) (\delta_{\lambda'_1 \lambda_1})^2 &\rightarrow \frac{\Phi_P(q_1)}{2\pi}, \\ g^2 Sp(TT\delta) (\delta_{\lambda'_2 \lambda_2})^2 &\rightarrow \frac{\Phi_P(q_2)}{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

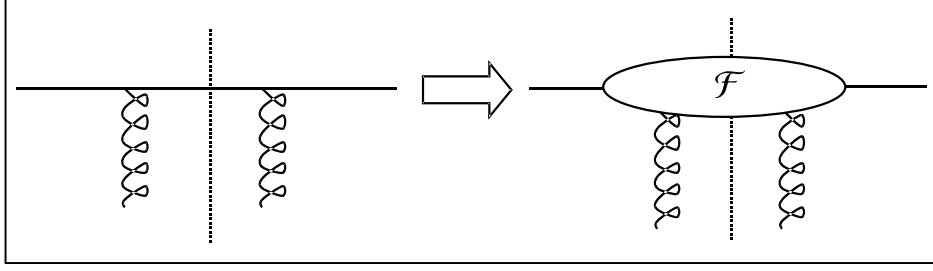


Abb. 3-7 Ersetzung der Quarklinie durch den Proton-Impaktfaktor

Man kann an dieser Stelle noch einen Schritt weiter gehen und verwenden, dass der Proton-Impakt-Faktor in einer sehr engen Beziehung zu der unintegrierten Gluonverteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, q_\perp)$ steht [FR]

$$\mathcal{F}(x, q_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^2 k'_\perp}{k'^2_\perp} \Phi_P(k'_\perp) k'^2_\perp F(x, k_\perp, k'_\perp). \quad (3.15)$$

Dabei bezeichnet x den longitudinalen Impulsbruchteil des Gluons vom Protonimpuls P^+ ,

$$x \equiv \frac{q^+}{P^+}. \quad (3.16)$$

In der QMRK geht entsprechend den Gleichungen (2.11) und (2.14) die Variable x prinzipiell gegen Null $x \rightarrow 0$, was der Ursprung des viel verwendeten Begriffs der 'small-x'-Physik ist. Bei einer numerischen Auswertung hat x hingegen einen endlichen Wert, und man muss darauf achten, die Bedingung $x \ll 1$ so gut wie möglich zu erfüllen.

Die BFKL-Amplitude $F(x, k_\perp, k'_\perp)$ in Gleichung (3.15) kann analytisch berechnet werden und ist in der Baumgraphennäherung, also in führender Ordnung in der Kopplungskonstanten, durch eine Deltafunktion der Impulse

$$F(x, k_\perp, k'_\perp) = \delta^2(k_\perp - k'_\perp) \quad (3.17)$$

gegeben [FR]. Gleichungen (3.15) und (3.17) liefern sofort den einfachen Zusammenhang

$$\mathcal{F}(x, q_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^3} \Phi_P(q),$$

und wir können auf diesem Weg die Proton-Impakt-Faktoren in Gleichung (3.14) durch unintegrierte Gluonverteilungsfunktionen $\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})$ und $\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})$ ersetzen. Die bisherigen Überlegungen und Teilergebnisse in den Gleichungen (3.3), (3.5), (3.13) und (3.14) dieses Abschnitts erlauben es, den Wirkungsquerschnitt der Quark-Antiquark-Erzeugung in einer hochenergetischen Proton-Proton-Kollision aufzuschreiben

$$\begin{aligned} \sigma_{P_1 P_2 \rightarrow q \bar{q} X} &= \frac{1}{16 (2\pi)^4} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^+} \frac{d^3 k_2}{k_2^+} d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp} \delta^2(q_{1\perp} - q_{2\perp} - k_{1\perp} - k_{2\perp}) \times \\ &\quad \frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{(q_{1\perp}^2)^2} \frac{(A^{c_2 c_1})^\dagger A^{c_2 c_1}}{(N_c^2 - 1)^2} \frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{(q_{2\perp}^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Es ergibt sich ein Gesamtbild ähnlich dem in Abbildung 3-2. Die kollidierenden Protonen wechselwirken primär über den Austausch von Gluonen. Die gluonische Struktur des Protons wird dabei durch eine unintegrierte Gluonverteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, q_\perp)$ beschrieben, die vom longitudinalen Impulsbruchteil x und dem Transversalimpuls q_\perp des Gluons abhängt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit man ein Gluon mit gegebenem x und q_\perp im Proton antrifft. Die unintegrierte Gluonverteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, q_\perp)$ kann nicht direkt analytisch berechnet werden und muss daher durch ein geeignetes Experiment bestimmt werden. Dabei garantiert die Faktorisierung die Universalität der Verteilungsfunktion, was sich zum Beispiel darin äußert, dass eine in einem Elektron-Proton-Streuexperiment gemessene Gluonverteilungsfunktion ebenso die Struktur des Protons in einer Proton-Proton-Kollision beschreibt. Trotz der analytisch unzugänglichen Struktur des Protons sind dadurch prinzipiell eindeutige Vorhersagen für alle faktorisierenden hochenergetischen Proton-Stoßprozesse möglich. Eine solche generelle Vorhersagekraft ist selbstverständlich eine Grundvoraussetzung aller physikalischen Theorien.

Der eigentliche Quark-Antiquark-Produktionsmechanismus wird durch die harte Amplitude $A^{c_2c_1}$ beschrieben. Sie ist im Rahmen der QMRK und der Störungstheorie analytisch berechenbar und gibt im Detail Auskunft darüber, wie die beiden Gluonen, die in unserem Formalismus nicht auf der Massenschale liegen müssen, zu dem Quark-Antiquark-Paar fusionieren. Bei der Untersuchung der harten Amplitude in einem der nächsten Abschnitte wird unser besonderes Augenmerk auf der wichtigen Eigenschaft der Eichinvarianz liegen.

Im Hinblick auf die Abbildung 3-4 war klar, dass im t -Kanal nur Eichbosonen ausgetauscht werden können. Nachdem die obere und untere Quarklinie nun aber durch die Verteilungsfunktionen ersetzt worden sind (Abbildung 3-7), ist es durchaus vorstellbar, dass die Streuung nicht an den Gluonen sondern an den Quarks der Protonen stattfindet. Die unintegrierte Gluonverteilungsfunktion würde in diesem Fall durch eine Quarkverteilungsfunktion ersetzt werden, genauso wie die Gluonfusionsamplitude $A^{c_2c_1}$ einer entsprechenden Produktionsamplitude mit einem oder zwei einlaufenden Quarks weichen müsste. Es stellt sich allerdings heraus, dass bei den betrachteten hohen Energien der einlaufenden Protonen der primäre Gluonaustausch stark gegenüber der Wechselwirkung an einem primären Quark dominiert. Von der experimentellen Seite her äußert sich das durch ein Verschwinden der Valenzquarkverteilungsfunktionen hin zu kleinem x [GRV98], während die entsprechende Gluonverteilung im Bereich kleiner Impulsbruchteile $x \ll 1$ sogar stärker als die Seequarkverteilungen anwächst. Dies deckt sich mit der theoretischen Feststellung, dass in der QMRK der Gluonaustausch im t -Kanal gegenüber dem Quark austausch dominiert [FR].

In Abbildung 3-8 sind die Auswirkungen der Hochenergienäherung auf die Berechnung der Quark-Antiquark-Hadroproduktion zusammengefasst. Die von uns durchgeführte Approximation leistet mindestens zweierlei. Zunächst erlaubt sie starke Vereinfachungen der den Prozess beschreibenden Gleichungen, was es letztlich erst möglich macht, den Wirkungsquerschnitt bis zu einem gewissen Grad analytisch zu berechnen. Weiterhin treten die charakteristischen Merkmale des Prozesses deutlich hervor, wie zum Beispiel die rein longitudi-

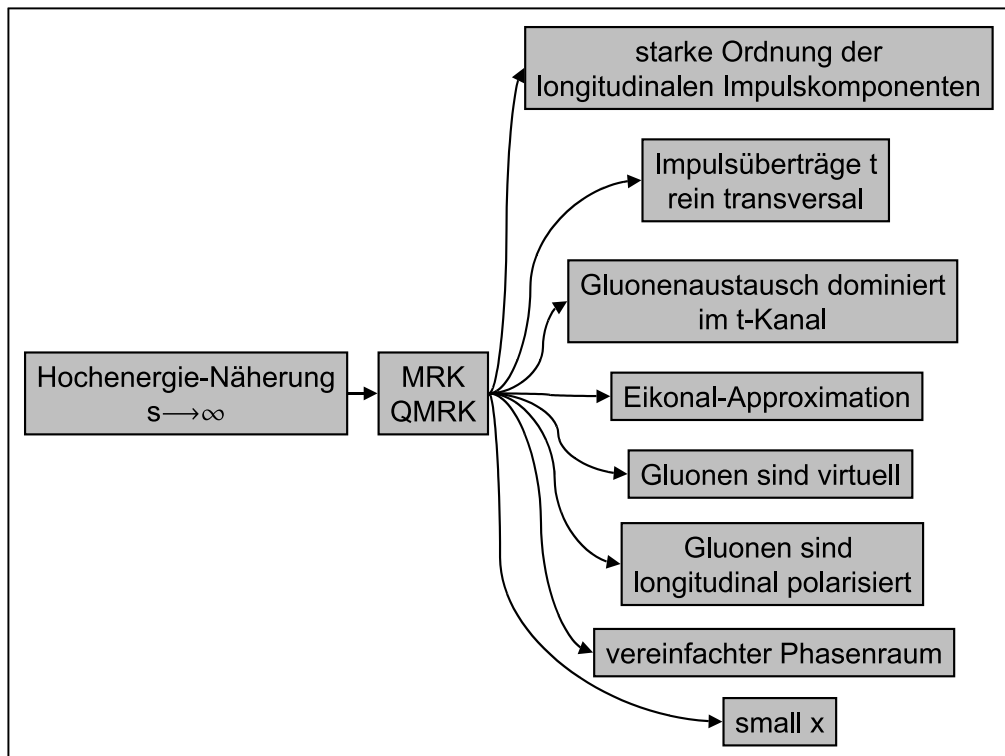


Abb. 3-8 Die Hochenergienäherung für eine Hadronkollision

nale Polarisation der Gluonen im t -Kanal. Besondere Betonung sollte hier auf der Tatsache liegen, dass alle wesentlichen Vereinfachungen einzig und allein auf der QMRK und damit der zentralen Hochenergieforderung, ausgedrückt in Gleichung (2.8), basieren. Erst dieser Umstand ermöglicht es, auf eine kontrollierte Art und Weise aus dem Vergleich zwischen theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Daten Schlussfolgerungen über den Gültigkeits- und Anwendungsbereich der Theorie zu ziehen.

3.3 Vergleich mit der kollinearen Faktorisierung

Die im vorigen Abschnitt diskutierte k_{\perp} -Faktorisierung ist bislang nicht das Standard-Berechnungsschema in der Streuphysik. Selbst für die Beschreibung der Kolliderexperimente am TeVatron, die zur Zeit die höchsten Energien pro Teilchen zur Verfügung stellen, wird in der Regel die sogenannte kollineare Faktorisierung verwendet. Diese beiden Faktorisierungsmethoden unterscheiden sich grundlegend, müssen aber prinzipiell die gleiche Physik beziehungsweise die gleichen Experimente beschreiben. Alleine das daraus entstehende Spannungsverhältnis ist Grund genug, einen Vergleich zwischen der k_{\perp} -Faktorisierung und kollinearen Faktorisierung anzustellen [Sha].

Wie ihr Name schon sagt, liegt das Wesensmerkmal der kollinearen Faktorisierung darin, dass die primären Wechselwirkungsteilchen, das heißt die Quarks

und Gluonen³, die zur Struktur der Protonen gehören, kollinear sind, ihr Impuls also direkt proportional zum Dreierimpuls \vec{P} ihres Protons ist, $\vec{q}_{q,g} \propto \vec{P}$. Da wir üblicherweise im cms-Bezugssystem arbeiten, das im Zusammenhang mit Gleichung (2.2) definiert ist, verschwinden in der kollinearen Faktorisierung folglich die transversalen Komponenten der Partonimpulse. Die Kollinearität ist an sich eine zusätzliche Annahme und beruht auf der sicherlich richtigen Vorstellung, dass die longitudinalen Partonimpulse wesentlich größer als die zugehörigen Transversalimpulse sind, $q_{||} \gg q_{\perp}$, weswegen man auch von der kollinearen Approximation spricht. Ihr Ursprung liegt im einfachen Partonmodell [BP69, Fey, KS74], bei dem angenommen wird, dass das Proton ohne explizite gluonische Wechselwirkung nur aus drei Valenzquarks up-up-down aufgebaut ist. Damit diese drei Quarks einen gebunden Zustand darstellen können, sollten sie nach Möglichkeit nicht auseinanderlaufen und sich deshalb zueinander kollinear bewegen.

Die kollineare Approximation und die Hochenergienäherung schließen sich zunächst nicht aus. Arbeiten wir also bei sehr hohen Energien, sind die Impulsübertragsquadrate t_i entsprechend Gleichung (2.13) rein transversal und damit in der kollinearen Näherung identisch Null

$$t = q_{q,g}^2 \approx q_{q,g\perp}^2 = 0. \quad (3.19)$$

Für verschwindende Quarkmassen liegen die Partonen also auf der Massenschale. Das ist ein bemerkenswertes Ergebnis und hat unter anderem zur Folge, dass die Gluonen reell und daher transversal polarisiert sein müssen. Sofort wirft sich hier die Frage auf, ob ein Widerspruch zwischen Gleichung (3.19) beziehungsweise dem eben gesagten und unserer Ableitung des Wirkungsquerschnittes (3.18) besteht. Unter anderem enthält der Wirkungsquerschnitt aus Gleichung (3.18) Faktoren $(q_{\perp}^2)^{-1}$, die im Fall der kollinearen Approximation divergent wären, und weiterhin folgt aus Gleichung (3.10), dass die Gluonen im Rahmen der QMRK longitudinal polarisiert sind. Die Ursache dieser scheinbaren Widersprüche liegt in unserer Ableitung des Wirkungsquerschnittes. Im Fall der kollinearen Approximation ist es nicht möglich, direkt mit einer vereinfachten Quark-Quark-Streuung wie in Abbildung 3-4 zu beginnen und anschließend die Quarklinien durch Verteilungsfunktionen zu ersetzen. In einem Feynmandiagramm, wie zum Beispiel auch in Abbildung 3-4, stellen die inneren Linien gerade keine Teilchen dar, die auf der Massenschale liegen. Dadurch wird sofort klar, dass die Amplitude in Gleichung (3.8) nicht direkt auf die kollineare Approximation übertragen werden kann und alle darauf folgenden Gleichung auch nicht mit dem kollinearen Fall verglichen werden dürfen. Der Wirkungsquerschnitt für die kollineare Faktorisierung wird auf einem anderen Weg hergeleitet, bei dem das Auftreten von Propagatoren der Partonen vermieden werden kann. Die Gleichung für den Streuquerschnitt des Prozesses in Abbildung 3-1 folgt auch in der kollinearen Approximation dem allgemeinen Schema aus Gleichung (3.2) und ist durch

$$\sigma_{PP \rightarrow q\bar{q}X} \propto g(x_1, \mu_1^2) g(x_2, \mu_2^2) \sigma_{gg \rightarrow q\bar{q}} \quad (3.20)$$

³in diesem Zusammenhang auch Partonen genannt

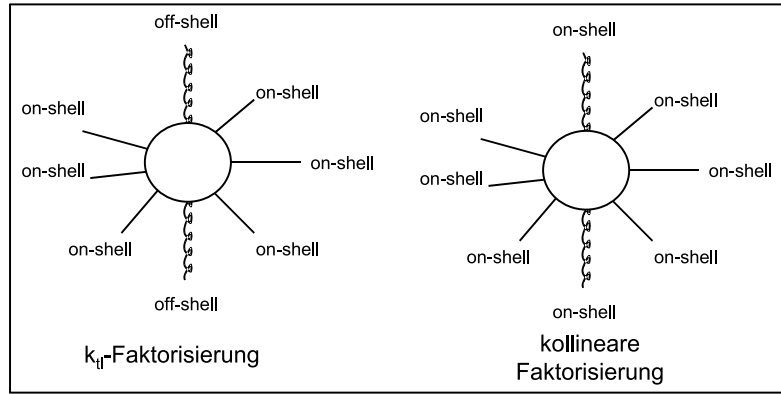


Abb. 3-9 Amplituden in den zwei Faktorisierungsschemata

gegeben. Dabei parametrisiert die Gluonverteilungsfunktion $g(x, \mu^2)$ die Gluonstruktur im Proton, während der elementare partonische Wirkungsquerschnitt $\sigma_{gg \rightarrow q\bar{q}}$ analytisch berechnet werden kann.

Trotz den vorherigen Überlegungen bleibt die Frage nach dem genauen Zusammenhang zwischen kollinearer und k_\perp -Faktorisierung an dieser Stelle bestehen. Schließlich sollte es doch möglich sein, in der Gleichung (3.18) in einem wohldefinierten Sinn den Grenzwert verschwindender Transversalimpulse $q_{1\perp}, q_{2\perp} \rightarrow 0$ im t -Kanal zu betrachten und so den Wirkungsquerschnitt der kollineare Faktorisierung in Gleichung (3.20) aus der k_\perp -Faktorisierung abzuleiten. Aber wie ist es möglich, dass in einem solchen stetigen Grenzwert verschwindender Impulskomponenten ein unstetiger Wechsel von longitudinal polarisierten zu transversal polarisierten Gluonen stattfinden kann? Die Beantwortung dieser Frage steht in einer engen Beziehung zu Fragen der Eichinvarianz und wird uns in dem späteren Abschnitt "Der kollineare Limes" noch beschäftigen.

Die Tatsache, dass die Gluonen in der kollinearen Approximation, im Gegensatz zur k_\perp -Faktorisierung, auf der Massenschale liegen hat schon allein für die Berechnung der harten Amplitude entscheidende Konsequenzen. Um das zu verdeutlichen werfen wir einen Blick auf Abbildung 3-9. Im Fall der kollinearen Approximation genügt es, einen harten Prozess zu berechnen, bei dem alle aus- und einlaufenden Teilchen reell sind. Solche Amplituden sind durch bloße Anwendung der Feynman-Regeln beziehungsweise der Störungstheorie nach einem bestimmten Schema zu berechnen und liefern eine richtige und vor allem eichinvariante Antwort. Die Anwendung der Feynman-Regeln auf Prozesse mit äußeren virtuellen Teilchen hingegen ergibt in der Regel kein eichinvariantes und damit ein zunächst falsches Ergebnis!

Wie bereits angekündigt werden wir uns diesem Problem im nächsten Kapitel zuwenden.

Ein weiteres Merkmal der kollinearen Approximation tritt bei der Betrachtung differentieller Wirkungsquerschnitte zutage. Experimentell und in der Theorie ist man oft an der Bestimmung von Streuquerschnitten in Abhängigkeit von transversalen Impulsen P_\perp der produzierten Teilchen interessiert. Diese Wirkungsquerschnitte können unter Umständen einen direkten Einblick in

den harten Produktionsmechanismus geben. Für den Fall der Quark-Antiquark Produktion in Abbildung 3-1 ist allerdings bei der kollinearen Faktorisierung in niedrigster Ordnung α_S^2 (="leading order"=LO) der Störungstheorie der Gesamttransversalimpuls des herauslaufenden Quark-Antiquark-Paares $P_\perp = q_{1\perp} - q_{2\perp}$ identisch Null

$$P_\perp = 0.$$

Aus diesem Grund macht es hier gar keinen Sinn, einen entsprechenden differentiellen LO Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{PP \rightarrow q\bar{q}X}}{dP_\perp} \quad (3.21)$$

zu betrachten. Ebenso sind differentielle Wirkungsquerschnitte, zum Beispiel nach $q_{1\perp}$ bei festgehaltenem $q_{2\perp}$, die eine Korrelation der produzierten Teilchen beschreiben, in führender Ordnung ohne Bedeutung. Oder anders ausgedrückt ist die Korrelation in LO wegen $q_{1\perp} = q_{2\perp}$ trivial. Die einfachste Möglichkeit, diesen offensichtlichen Missstand zu beheben, liegt darin, zu höheren Ordnungen⁴ der harten Amplitude überzugehen. In NLO kann zum Beispiel neben dem Quark-Antiquark-Paar ein zusätzliches hartes Gluon produziert werden, das nicht explizit detektiert wird. Gemäß der kollinearen Approximation ist der Transversalimpuls k_\perp dieses Gluons dann dem Gesamttransversalimpuls P_\perp genau entgegengesetzt, $P_\perp = -k_\perp$. Da der Gluonimpuls nicht festgelegt ist, sind dadurch in NLO Quark-Antiquark-Korrelationen möglich. Es wird also im Zusammenhang mit der kollinearen Approximation für die Beschreibung von experimentell gemessenen Korrelationen ein Berechnungsschema herangezogen, das in führender Ordnung ein triviales Resultat liefert und prinzipiell erst in NLO in der Lage ist, die tatsächliche Physik zu beschreiben. Im Grunde macht es in diesem Zusammenhang wenig Sinn, bei LO Rechnungen von "führender" Ordnung zu sprechen, und die Erwartung, dass NLO-Rechnungen maßvolle Korrekturen zu LO-Ergebnissen liefern, wird hier nicht erfüllt. Um es etwas überspitzt zu formulieren rettet man sich an dieser Stelle gerne durch die Feststellung, dass die eigentliche Störungsreihe für differentielle Wirkungsquerschnitte wie in Gleichung (3.21) in der kollinearen Faktorisierung erst mit der Ordnung α_S^3 beginnt.

Zusammengefasst findet man mit der kollinearen und der k_\perp -Faktorisierung auf den ersten Blick zwei gleichwertige Möglichkeiten, hadronische Streuprozesse zu berechnen. Die Gleichungen für die Wirkungsquerschnitte, (3.18) und (3.20), folgen strukturell der allgemeinen Faktorisierungsform aus Gleichung (3.2). Bei näherem Hinschauen haben wir jedoch substanzielle Unterschiede sowohl in der Interpretation als auch der Anwendung der beiden Schemata gefunden. Die kollineare Faktorisierung arbeitet mit reellen, transversal polarisierten Gluonen, die auch als Partonen bezeichnet werden. Die Amplitude zu einer gegebenen Ordnung der Störungstheorie erhält man dabei durch Anwendung von Feynman-Regeln, wobei erst die NLO Rechnungen zur Beschreibung P_\perp -differentieller Wirkungsquerschnitte geeignet sind. In der k_\perp -Faktorisierung wird die Wechselwirkung durch virtuelle Gluonen vermittelt, was dazu führt,

⁴"next-to-leading-order"=NLO und so weiter

dass die harte Amplitude nicht einfach durch eine Anwendung der Störungstheorie berechnet werden kann. Aufgrund der QMRK sind die Gluonen rein longitudinal polarisiert und tragen einen endlichen Transversalimpuls. Aus diesem Grund lassen sich im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung bereits in führender Ordnung der Störungstheorie sämtliche differentiellen Wirkungsquerschnitte und Korrelationen berechnen.

4. DIE AMPLITUDE

In diesem Kapitel wird der Quark-Antiquark-Produktions-Vertex im Rahmen der QMRK untersucht [FL96, Fad, FL89]. Besondere Betonung liegt dabei auf der Eichinvarianz.

Unserem Wissen nach wurde dieser Vertex in der von Fadin und Lipatov angegebenen und von uns weiter unten verwendeten Form bisher noch nicht explizit abgeleitet. Auch die in diesem Zusammenhang häufig zitierten Arbeiten [CCH90, CCH91b, CC96, FFFK98] umgehen eine Herleitung des Vertex, indem sie die Eichinvarianz postulieren und anschließend zu einfacheren Ausdrücken gelangen beziehungsweise auf die in [FL96] dargestellte explizite Form zurückgreifen. Der zur Quark-Antiquark-Produktion analoge Gluon-Gluon-Produktionsvertex [FL96] wird hingegen in [Lip88, FL89], basierend auf Berechnungen von bosonischen String-Amplituden in der Näherung der QMRK, hergeleitet. Diese Rechnungen sollten sich durch einen Übergang zu fermionischen Amplituden, zum Beispiel unter Verwendung von supersymmetrischen Transformationen, auf die $q\bar{q}$ -Erzeugung übertragen lassen. Als Anhaltspunkt können die entsprechenden Berechnungen der bosonischen und fermionischen Yang-Mills-Vertices im Rahmen der Superstring-Theorie [Sch82] dienen.

Die Amplitude $A^{c_2 c_1}$ und der im folgenden diskutierte Vertex $\psi^{c_2 c_1}$ hängen über die Spinoren des Quarks $u(k_1)$ beziehungsweise Antiquarks $v(k_2)$ wie folgt zusammen

$$A^{c_2 c_1} \equiv \bar{u}(k_1) \psi^{c_2 c_1} v(k_2). \quad (4.1)$$

4.1 Diskussion des Vertex

Abgesehen von den Näherungen der QMRK in Bezug auf die longitudinalen Impulskomponenten werden für den Fadin-Lipatov-Vertex sämtliche transversalen Impulskomponenten mitgenommen. Man sollte sich vergegenwärtigen, dass das bereits für die elementaren Feynman-Diagramme zu relativ komplizierten Ausdrücken führt und der finale Ausdruck für den Quark-Antiquark-Produktionsvertex entsprechend umfangreich sein wird. Aus diesem Grund gibt es natürlich auch zahlreiche Möglichkeiten für eine explizite Notation des Vertex im Impulsraum. Für die Diskussion und Interpretation des Fadin-Lipatov-Vertex halten wir uns im folgenden eng an die ursprüngliche Notation von Fadin und Lipatov [FL96]. Diese Notation erlaubt weitestgehend eine klare und strukturierte Untersuchung der Gleichungen.

Der Quark-Antiquark-Produktionsvertex $\psi^{c_2 c_1}$ in der QMRK ist dabei zunächst durch den Ausdruck

$$\psi^{c_2 c_1} \equiv -g^2 (T^{c_1} T^{c_2} b(k_1, k_2) - T^{c_2} T^{c_1} b^T(k_2, k_1)) \quad (4.2)$$

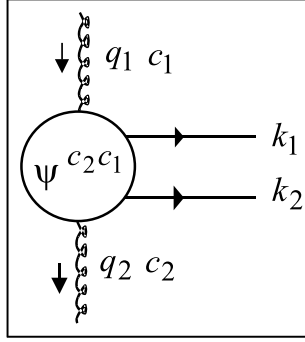


Abb. 4-1 Der Quark-Antiquark-Produktionsvertex

gegeben. Gleichung (4.2) dient im wesentlichen einer Faktorisierung des Vertex in Farb- und Impuls- beziehungsweise Diracstrukturen. Die Farbmatriizen T^{c_i} entsprechen der fundamentalen Darstellung der Farbalgebra. Der rechte Teil der Gleichung (4.2) proportional zu der Funktion $b^T(k_2, k_1)$ steht für die Anteile, bei denen die auslaufenden Quarklinien wie in Abbildung 4-2 vertauscht oder gekreuzt wurden.

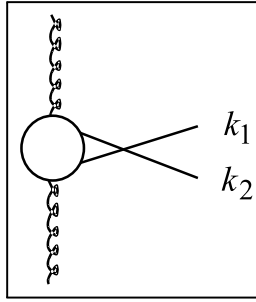


Abb. 4-2 Das gekreuzte Diagramm

Die zwei Beiträge $b(k_1, k_2)$ und $b^T(k_2, k_1)$ haben, ausgedrückt in den Impulsen der Quarks und Gluonen, die Form

$$b(k_1, k_2) \equiv \gamma^- \frac{\not{q}_{1\perp} - \not{k}_{1\perp}}{(q_1 - k_1)^2} \gamma^+ - \frac{\gamma_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)}{(k_1 + k_2)^2} \quad (4.3)$$

und

$$b^T(k_2, k_1) \equiv \gamma^+ \frac{\not{q}_{1\perp} - \not{k}_{2\perp}}{(q_1 - k_2)^2} \gamma^- - \frac{\gamma_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)}{(k_1 + k_2)^2}. \quad (4.4)$$

Für die weiteren Betrachtungen wenden wir uns nur dem Anteil $b(k_1, k_2)$ zu, wobei gleichwertige Aussagen selbstverständlich auch für den gekreuzte Beitrag gelten. Der linke Teil der Gleichung (4.3) entspricht dem Standard-Feynmangraphen in Abbildung 4-3. Die beiden Gammamatriizen in diesem Ausdruck resultieren aus den Quark-Gluon-Vertices und der Eikonal-Approximation, und zwischen ihnen befindet sich der vollständige Quark-Propagator.

Der rechte Teil der Gleichung (4.3) entspricht einer komplizierteren Struktur. Der sogenannte effektive Vertex $\Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)$ kann dabei in zwei weitere

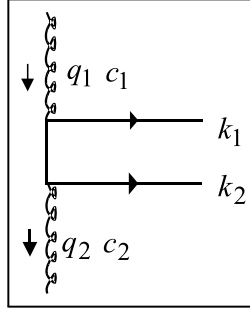


Abb. 4-3 Der Standard-Beitrag

Anteile zerlegt werden

$$\Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) \equiv \gamma^{+-\beta}(q_1, q_2) + \left\{ -2t_1 \frac{n^{-\beta}}{q_1^- - q_2^-} + 2t_2 \frac{n^{+\beta}}{q_1^+ - q_2^+} \right\}. \quad (4.5)$$

Die Plus- und Minus-Komponenten des effektiven Vertex (4.5) haben erneut ihren Ursprung in der Eikonal-Näherung. Die Funktion $\gamma^{+-\beta}(q_1, q_2)$ in Gleichung (4.5) steht für den Beitrag des Standard-Drei-Gluonen-Vertex in Abbildung 4-4 und soll hier der Vollständigkeit halber auch explizit angegeben werden

$$\gamma^{\alpha_2 \alpha_1 \beta}(q_1, q_2) \equiv (q_1 + q_2)^\beta g^{\alpha_2 \alpha_1} + (q_1 - 2q_2)^{\alpha_2} g^{\alpha_1 \beta} - (2q_1 - q_2)^{\alpha_1} g^{\alpha_2 \beta}. \quad (4.6)$$

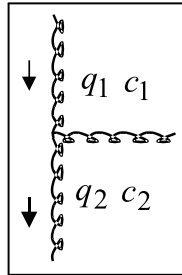


Abb. 4-4 Der 3-Gluon Vertex

Besonders wichtig sind die Anteile in der geschweiften Klammer in Gleichung (4.5). Sie folgen nicht direkt aus der naiven Anwendung von Feynman-Regeln und führten auch zu dem Begriff des effektiven Vertex für $\Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)$. Wie können nun die beiden Anteile in der geschweiften Klammer interpretiert werden? Die Antwort hängt eng mit den Faktoren t_1 und t_2 zusammen. In der QMRK sind diese Impulsübertragsquadrate rein transversal, aber vor allem entsprechen sie gerade den inversen Gluonpropagatoren im t -Kanal. Bauen wir den effektiven Vertex wieder in ein Quark-Quark-Diagramm wie in Abbildung 3-6 ein, hebt sich jeweils ein Gluonpropagator $\propto 1/q_i^2$ mit dem entsprechenden Faktor t_i weg, was zur Folge hat, dass eine Gluonlinie im t -Kanal zu einem Punkt zusammenschrumpft.

Das Gluon im s -Kanal wird in diesem Fall also in einem effektiven Quark-Quark-Gluon-Gluon Vertex produziert, so wie es in Abbildung 4-5 dargestellt ist.

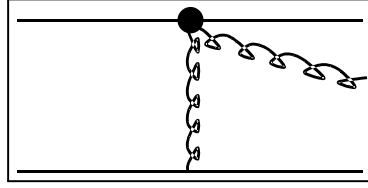


Abb. 4-5 Der effektive Quark-Quark-Gluon-Gluon-Vertex

4.1.1 Die Ward-Slavnov-Identität für den effektiven Vertex

Sogenannte Ward-Slavnov oder auch nur Ward-Identitäten spielen in der gesamten Quantenfeldtheorie eine wichtige Rolle und erlauben es zum Beispiel, Aussagen über bestimmte Vertices oder Amplituden zu treffen, die für alle Ordnungen der Störungstheorie gelten. Der effektive Vertex in Gleichung (4.5) erfüllt eine solche Ward-Slavnov-Identität:

$$(k_1 + k_2)_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) = (q_1 - q_2)_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) = 0. \quad (4.7)$$

Wir wollen nun die Gleichung (4.7) kurz ableiten und machen dabei intensiven Gebrauch von der QMRK. Zunächst lässt sich die rechte Seite von Gleichung (4.7) etwas weiter ausschreiben

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) &= \frac{1}{2} q_1^+ \Gamma^{+--}(q_2, q_1) - \frac{1}{2} q_2^- \Gamma^{++-}(q_2, q_1) \\ &\quad + (q_1 - q_2)_\perp \cdot \Gamma^{+-\perp}(q_2, q_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für die einzelnen Terme in Gleichung (4.8) findet man durch Einsetzen der Gleichungen (4.5) und (4.6) die Ausdrücke

$$q_1^+ \Gamma^{+--}(q_2, q_1) = q_1^+ \left(-2q_2^- + \frac{4t_2}{q_1^+} \right), \quad (4.9)$$

$$q_2^- \Gamma^{++-}(q_2, q_1) = q_2^- \left(-2q_1^+ + \frac{4t_1}{q_2^-} \right) \quad (4.10)$$

und

$$(q_1 - q_2)_\perp \cdot \Gamma^{+-\perp}(q_2, q_1) = 2(t_1 - t_2). \quad (4.11)$$

Zusammengenommen liefern Gleichungen (4.8), (4.9), (4.10) und (4.11) offensichtlich die gesuchte Ward-Slavnov-Identität aus Gleichung (4.7). Die enge Beziehung zwischen der Ward-Slavnov-Identität und der Eichinvarianz der Amplitude wird im nächsten Abschnitt deutlich.

4.1.2 Eichinvarianz

Ein zentraler Punkt bei der Untersuchung der Quark-Antiquark-Produktionsamplitude liegt selbstverständlich in der Forderung nach Eichinvarianz. Da der

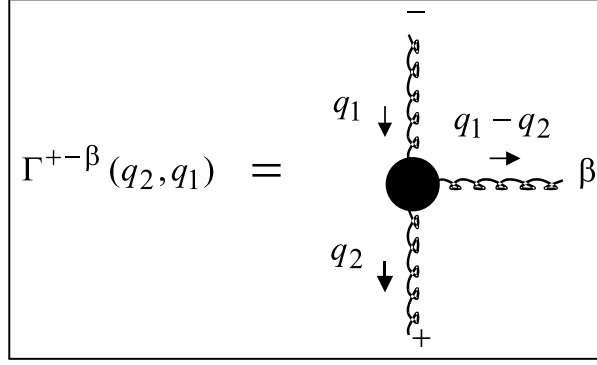


Abb. 4-6 Der effektive Vertex

Vertex (4.2) nicht in Feldoperatoren, sondern bereits in Impulsvariablen ausgedrückt ist, müssen wir uns zunächst überlegen, was Eichinvarianz auf dieser Ebene bedeutet. Dazu macht man sich klar, dass jede äußere Gluonlinie mit Impuls q in einem Feynmandiagramm ursprünglich von einem Gluonfeldoperator $A_\mu(x)$ abstammt. Bei einer lokalen abelschen Eichtransformation wird dieser Feldoperator mit Hilfe des skalaren Felds $\Theta(x)$ wie folgt transformiert

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x).$$

Im Impulsraum, wenn die Feldoperatoren also durch Erzeuger/Vernichter und Polarisationsensoren beziehungsweise Spinoren ausgedrückt worden sind, erhält man die entsprechende Transformation des Polarisationsensors $\epsilon_\mu(q)$ des Gluonfeldes durch

$$\epsilon_\mu(q) \rightarrow \epsilon_\mu(q) + q_\mu \tilde{\Theta}(q).$$

Die Eichinvarianz einer Amplitude M mit zum Beispiel einer äußeren Gluonlinie

$$M(q) = M^\mu(q) \epsilon_\mu(q)$$

wird folglich durch das Verschwinden der Kontraktion des Vertex $M^\mu(q)$ mit dem Impuls q dieser äußeren Linie sichergestellt

$$q_\mu M^\mu(q) \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.12)$$

Als wichtiges Beispiel betrachten wir an dieser Stelle nochmal den effektiven Vertex aus Gleichung (4.5), der in der Abbildung 4-6 dargestellt ist.

Die Forderung nach Eichinvarianz in Bezug auf die Gluonlinie mit dem Index β lautet für den effektiven Vertex also

$$(q_1 - q_2)_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) = 0,$$

und das entspricht gerade der bereits bewiesenen Ward-Slavnov-Identität in Gleichung (4.7)! Somit ist die Eichinvarianz in Bezug auf diese s -Kanal-Gluonlinie bereits bewiesen.

Da der vollständige Vertex in Gleichung (4.2) in der Eikonal-Approximation vorliegt und aus diesem Grund keine äußeren freien Indices μ und ν für die Gluonen in t -Kanal mehr zur Verfügung stehen, ist zunächst nicht klar, wie die

Forderung nach Eichinvarianz an dieser Stelle zu formulieren ist. Zur Lösung dieses Problems nimmt man an, im Besitz des Vertex ohne Eikonal-Näherung zu sein und restauriert in einem ersten Schritt zum Beispiel den Index der oberen Gluonlinie in Abbildung 4-1. Wir bezeichnen diesen Vertex in Anlehnung an Gleichung (4.2) mit $\psi^{\mu+ c_2 c_1}$. Um die folgenden Rechnungen zu erleichtern und die produzierten Teilchen auf die Massenschale zu setzen, geht man nun durch Multiplikation mit den Spinoren für das produzierte Quark $u(k_1)$ und das Antiquark $v(k_2)$ vom Vertex zur Produktionsamplitude $A^{\mu+ c_2 c_1}$ über

$$A^{\mu+ c_2 c_1} \equiv \bar{u}(k_1) \psi^{\mu+ c_2 c_1} v(k_2). \quad (4.13)$$

Im Falle der Eichinvarianz der Amplitude in Bezug auf das obere t -Kanal-Gluon gilt dann

$$q_{1\mu} A^{\mu+ c_2 c_1} = 0. \quad (4.14)$$

In der QMRK ist gemäß den Gleichungen (2.9) und (2.13) die $+$ Komponente von q_1 viel größer als die $-$ Komponente, $q_{1-} = q_1^+ \gg q_1^- = q_{1+}$, und man findet für Gleichung (4.14) näherungsweise

$$A^{-+ c_2 c_1} = -\frac{1}{q_1^+} q_{1\perp} \cdot A^{\perp+ c_2 c_1}. \quad (4.15)$$

Diese Gleichung erlaubt es, die Eichinvarianz der Amplitude von einem neuen Blickwinkel aus zu betrachten. Die rechte Seite der Gleichung (4.15) ist nichts anderes als die Quark-Antiquark-Produktionsamplitude in der Eikonal-Approximation. Lassen wir nun die transversale Komponente des Gluonimpulses gegen Null streben $q_{1\perp} \rightarrow 0$, geht die linke Seite von Gleichung (4.15) ebenfalls gegen Null, jedenfalls solange $A^{\perp+ c_2 c_1}$ keine Faktoren $|q_{1\perp}|^{-n}$ enthält. Folglich muss die Quark-Antiquark-Produktionsamplitude $A^{c_2 c_1} = A^{-+ c_2 c_1}$, falls sie eichinvariant ist, im Grenzwert verschwindender Transversalimpulse gegen Null streben

$$A^{c_2 c_1} \xrightarrow{q_{1\perp} \rightarrow 0} 0. \quad (4.16)$$

Die Argumente dieses Abschnittes lassen sich natürlich ohne weiteres auch auf die untere Gluonlinie übertragen. Gleichung (4.16) liefert eine gute Handhabe zur Überprüfung der Eichinvarianz unserer Produktionsamplitude. Um den Grenzwert $q_{1\perp} \rightarrow 0$ für den Vertex aus Gleichung (4.2) durchführen zu können, untersuchen wir zunächst einmal ihre Farbstruktur. Man kann das Produkt $T^{c_1} T^{c_2}$ der Farbmatrizen durch eine einfache Manipulation in symmetrische und antisymmetrische Anteile in Bezug auf c_1 und c_2 zerlegen

$$\begin{aligned} T^{c_1} T^{c_2} &= \frac{1}{2} \{T^{c_1}, T^{c_2}\} + \frac{1}{2} [T^{c_1}, T^{c_2}] \\ &= \frac{1}{2} f^{c_1 c_2 c} T^c + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_c} \delta^{c_1 c_2} \mathbf{1}_{N_c \times N_c} + d^{c_1 c_2 c} T^c \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Der erste Term in diesem Ausdruck ist also antisymmetrisch, der zweite Term in Klammern (...) ist symmetrisch in den äußeren Farbindices. Die Berechnung des Grenzwerts $q_{1\perp} \rightarrow 0$ lässt sich daher in zwei Teile separieren, wenn man die

Zerlegung aus Gleichung (4.17) und die entsprechende Gleichung für $T^{c_2}T^{c_1}$ in Gleichung (4.2) einsetzt. Die symmetrischen Terme sind dabei proportional zu

$$-\gamma^- \frac{\not{k}_{1\perp}}{(q_1 - k_1)^2} \gamma^+ + \gamma^+ \frac{\not{k}_{2\perp}}{(q_1 - k_2)^2} \gamma^-.$$

Durch Vertauschung der Gammamatrizen und Umformung der Nenner kann dieser Ausdruck in

$$-\frac{(\not{k}_{1\perp} + k_1^+ \gamma^-)}{q_1^+ k_1^-} \gamma^- \gamma^+ + \gamma^+ \gamma^- \frac{(\not{k}_{2\perp} + k_2^+ \gamma^-)}{q_1^+ k_2^-} \quad (4.18)$$

umgeschrieben werden, wobei $\gamma^+ \gamma^+ = \gamma^- \gamma^- = 0$. Multipliziert man nun von links beziehungsweise rechts mit den Spinoren $\bar{u}(k_1)$ beziehungsweise $v(k_2)$, sieht man, dass sich wegen den Bewegungsgleichungen für masselose Quarks und Antiquarks

$$\bar{u}(k_1) \not{k}_1 = \not{k}_2 v(k_2) = 0$$

die beiden Terme in (4.18) wegheben. Der in c_1 und c_2 symmetrische Anteil von Gleichung (4.13) geht also im Grenzwert $q_{1\perp} \rightarrow 0$ tatsächlich gegen Null.

Beim antisymmetrischen Anteil ändert sich nur das Vorzeichen zwischen den beiden Termen in (4.18), so dass hier der Ausdruck

$$2 \frac{\gamma^+ \gamma^- \gamma^+}{q_1^+} = 4 \frac{\gamma^+}{q_1^+} \quad (4.19)$$

übrigbleibt. Allerdings muss an dieser Stelle noch der Anteil proportional zum effektiven Vertex aus Gleichung (4.5) mitgenommen werden. Für den Grenzwert des effektiven Vertex $\Gamma^{+-\beta}$ betrachten wir in einem ersten Schritt den Standard-3-Gluonen-Vertex, der in den Ausdruck

$$\gamma^{+-\beta}(q_2, q_1) \stackrel{q_{1\perp} \rightarrow 0}{=} -(k_1 + k_2)^+ n^{-\beta} + (k_1 + k_2)^- n^{+\beta} - 2(k_{1\perp} + k_{2\perp})^\beta \quad (4.20)$$

umgeformt werden kann. Dabei wurden die Impulse der Gluonen gemäß Gleichung (2.1) zerlegt und schließlich durch k_1 und k_2 ersetzt. Da $t_1 \rightarrow 0$, formen wir noch den dritten Term in Gleichung (4.5) geeignet um:

$$2t_2 \frac{n^{+\beta}}{q_1^+ - q_2^+} \stackrel{q_{1\perp} \rightarrow 0}{=} 2n^{+\beta} \left(\frac{(k_1 + k_2)^2}{q_1^+} + q_2^- \right). \quad (4.21)$$

Zusammengenommen liefern Gleichungen (4.20) und (4.21) für den effektiven Vertex den Ausdruck

$$\Gamma^{+-\beta}(q_1, q_2) \stackrel{q_{1\perp} \rightarrow 0}{=} -2(k_1 + k_2)^\beta + 2(k_1 + k_2)^2 \frac{n^{+\beta}}{q_1^+}.$$

Der Beitrag zur Amplitude in Gleichung (4.13) ist damit proportional zu

$$\bar{u}(k_1) \left[4 \frac{(\not{k}_1 + \not{k}_2)}{(k_1 + k_2)^2} - 4 \frac{\not{k}^+}{q_1^+} \right] v(k_2) = -4 \bar{u}(k_1) \frac{\not{k}^+}{q_1^+} v(k_2). \quad (4.22)$$

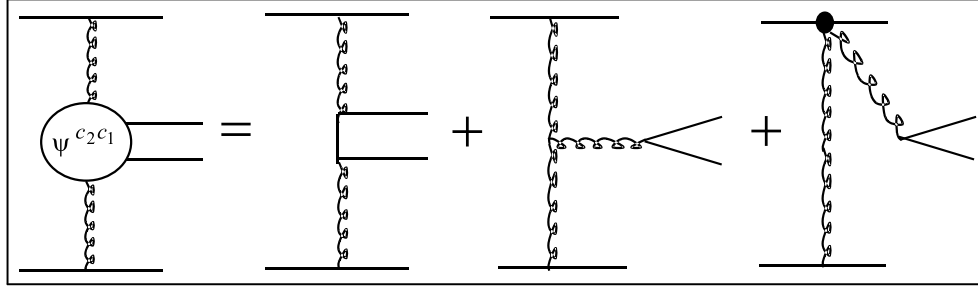


Abb. 4-7 Der eichinvariante Quark–Antiquark-Produktionsvertex

Mit einem Blick auf die vorherigen Rechnungen sieht man, dass sich die Beiträge der Gleichungen (4.22) und (4.19) zur Amplitude genau wegheben. Die Quark-Antiquark-Produktionsamplitude erfüllt also unsere Forderung nach Eichinvarianz (4.16) und verschwindet im Grenzwert verschwindender Gluon-transversalimpulse

$$\bar{u}(k_1)\psi^{c_2c_1}v(k_2) \xrightarrow{q_{1/2\perp} \rightarrow 0} 0. \quad (4.23)$$

Während für den in den Farbindices symmetrischen Beitrag zur Amplitude $A^{c_2c_1}$ der effektive Vertex keine Rolle spielt und die Standard-Feynman-Diagramme des Typs aus Abbildung 4-3 alleine eichinvariant sind, liegt bei dem antisymmetrischen Beitrag, wie wir gerade gesehen haben, eine kompliziertere Situation vor.

Dabei ist keiner der einzelnen Graphen der Amplitude in Abbildung 4-7 für sich genommen eichinvariant. Der Anteil des effektiven Vertex aus Gleichung (4.22) liefert im Grenzwert $q_{1\perp} \rightarrow 0$ Beiträge, die exakt die nicht-verschwindenden Anteile sowohl des Standard-3-Gluonen-Vertex als auch des Graphen aus Abbildung 4-3 wegheben. Beachtenswert ist weiterhin, dass bei der Herleitung des Grenzwertes (4.23) massiver Gebrauch von der QMRK gemacht wurde. Zusammenfassend stellt der effektive Anteil des Quark-Antiquark-Produktionsvertex aus Gleichung (4.2) auf eine nicht-triviale Art und Weise die Eichinvarianz des Quark-Antiquark-Produktionsvertex in Abbildung 4-7 in der QMRK sicher.

4.2 Der kollineare Limes

Die Frage nach dem genauen Zusammenhang zwischen der k_\perp -Faktorisierung und der kollinearen Faktorisierung wurde bereits angeschnitten und soll nun näher betrachtet werden. Ziel ist es, aus der Gleichung (3.18) für den Wirkungsquerschnitt in der k_\perp -Faktorisierung durch Berechnung des kollinearen Limes $q_{1/2\perp} \rightarrow 0$ das Pendant in der kollinearen Approximation abzuleiten. Wie bereits erwähnt, scheint das auf den ersten Blick gar nicht möglich zu sein, denn durch Bildung des kollinear Limes müsste man von rein longitudinal polarisierten zu rein transversal polarisierten Gluonen gelangen. Weiterhin

haben wir im letzten Abschnitt gelernt, dass die Produktionsamplitude in der k_\perp -Faktorisierung im Grenzwert $q_{1/2\perp} \rightarrow 0$ sogar verschwindet. Der Schlüssel zu diesen Problemen liegt in der allgemeinen Aussage der Eichinvarianz, ausgedrückt in Gleichung (4.15). Dabei sieht es zunächst so aus, als hätte man einen Fehler gemacht: In der Eikonal-Approximation in Gleichung (3.6) wurden doch die transversalen Komponenten der Gluonen und damit auch der Amplitude gegenüber den longitudinalen vernachlässigt, doch nun sagt Gleichung (4.15), dass die transversalen Komponenten der Amplitude bis auf Faktoren identisch mit den longitudinalen Komponenten sind! Sieht man etwas genauer hin, wird allerdings sofort klar, dass in der Eikonal-Näherung $q_{1\perp} \cdot A^{\perp+ c_1 c_2}$ gegenüber $P_1^+ A^{-+ c_1 c_2}$ vernachlässigt wurde und nicht gegenüber $q_1^+ A^{-+ c_1 c_2}$, was ja erst zum Widerspruch mit Gleichung (4.15) führen würde. Da aber $q_1^+ = x_1 P_1^+$ gilt und x_1 sehr klein ist, folgt aus der Eichinvarianz und der Hochenergienäherung sogar, dass

$$|q_{1\perp} \cdot A^{\perp+ c_1 c_2}| = |q_1^+ A^{-+ c_1 c_2}| \ll |P_1^+ A^{-+ c_1 c_2}|,$$

und das ist nichts weiter als die Eikonal-Approximation. Trotzdem erlaubt es uns die Eichinvarianz-Bedingung aus Gleichung (4.15) natürlich, die longitudinalen Komponenten der Amplitude sozusagen auf Kosten von Faktoren $(x_i)^{-1}$ durch die transversalen zu ersetzen. Für das Betragsquadrat der Amplitude findet man dann

$$|A^{c_2 c_1}|^2 = \frac{1}{x_1^2 x_2^2 s^2} |q_{1\perp} \cdot A^{\perp\perp c_1 c_2} \cdot q_{2\perp}|^2. \quad (4.24)$$

Nun wird zur Vereinfachung der weiteren Überlegungen angenommen, dass im noch durchzuführenden Grenzwert $q_{1/2\perp} \rightarrow 0$ die Abhängigkeit von den Zwischenwinkeln der Skalarprodukte wegfällt und damit aus Gleichung (4.24)

$$|A^{c_2 c_1}|^2 = \frac{1}{x_1^2 x_2^2 s^2} |q_{1\perp}|^2 |A^{\perp\perp c_1 c_2}|^2 |q_{2\perp}|^2 \quad (4.25)$$

folgt. Setzt man Gleichung (4.25) in den Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt (3.18) ein, kürzen sich einige Transversalimpulse heraus, und es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{P_1 P_2 \rightarrow q \bar{q} X} &= \frac{1}{16 (2\pi)^4} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^+} \frac{d^3 k_2}{k_2^+} d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp} \frac{1}{x_1^2 x_2^2 s^2} \left[\frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{q_{1\perp}^2} \right] \\ &\quad \left\{ \frac{\delta^2 (q_{1\perp} - q_{2\perp} - k_{1\perp} - k_{2\perp}) |A^{\perp\perp c_1 c_2}|^2}{(N_c^2 - 1)^2} \right\} \left[\frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{q_{2\perp}^2} \right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung besitzt nun eine Form, die es erlaubt, für den harten Anteil in der geschweiften Klammer $\{\dots\}$ den kollinearen Limes durchzuführen, denn die divergenten Faktoren $(q_{i\perp}^2)^{-1}$ konnten gekürzt beziehungsweise zu den unintegrierten Verteilungsfunktionen absepariert werden. Wir definieren daher das Quadrat der kollinearen Amplitude \tilde{A} durch den Grenzwert

$$\delta^2 (k_{1\perp} + k_{2\perp}) |\tilde{A}|^2 \equiv \lim_{q_{1/2\perp} \rightarrow 0} \left\{ \frac{\delta^2 (q_{1\perp} - q_{2\perp} - k_{1\perp} - k_{2\perp}) |A^{\perp\perp c_1 c_2}|^2}{(N_c^2 - 1)^2} \right\}. \quad (4.26)$$

Anschließend können die Integrale über $q_{1\perp}$ und $q_{2\perp}$ ausgeführt werden, wobei der Zusammenhang zwischen der integrierten Gluonverteilungsfunktion $g(x, \mu^2)$ und der unintegrierten Gluonverteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, q_\perp)$ zum tragen kommt

$$g(x, \mu^2) = \int d^2 q_\perp \frac{\mathcal{F}(x, q_\perp)}{q_\perp^2}. \quad (4.27)$$

Gleichungen (4.26) und (4.27) ergeben zusammen für den Wirkungsquerschnitt $\tilde{\sigma}$ im kollinearen Limes den Ausdruck

$$\tilde{\sigma}_{P_1 P_2 \rightarrow q \bar{q} X} = \frac{1}{16 (2\pi)^4} \int \frac{d^3 k_1}{k_1^+} \frac{d^3 k_2}{k_2^+} \frac{1}{x_1^2 x_2^2 s^2} \delta^2(k_{1\perp} + k_{2\perp}) g(x_1, \mu_1^2) \left| \tilde{A} \right|^2 g(x_2, \mu_2^2). \quad (4.28)$$

Dieser Ausdruck besitzt nun die typische Struktur eines Wirkungsquerschnitts in der kollinearen Faktorisierung.

4.3 Erweiterungen für schwere Quarks

Die bisher diskutierten Terme für den Quark-Antiquark-Produktionsvertex in den Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.5) sind nur im Fall vernachlässigbarer Quarkmassen gültig. Vernachlässigbar wären Quarkmassen, die zum Beispiel wesentlich kleiner als die typischen transversalen Impulse sind, bei denen die Amplitude einen wichtigen Beitrag liefert. In den später zu betrachtenden differentiellen Wirkungsquerschnitten wird die Abhängigkeit von Transversalimpulsen der Größenordnung einiger Gigaelektronenvolt (GeV) untersucht. Im Vergleich dazu sind dann zwar die Massen von up, down und unter Umständen auch des strange Quarks noch irrelevant, nicht aber die Massen der von uns untersuchten charm beziehungsweise bottom Quarks, wie sich aus der folgenden Tabelle ablesen lässt.

Quarktyp	up	down	strange	charm	bottom	top
Masse [GeV] \approx	0.004	0.007	0.1	1.5	4.5	170

Ab dem charm Quark spricht man generell auch von der Produktion schwerer Quarks. Mit Blick auf die Abbildung 4-7 wird deutlich, dass für den Produktionsvertex nur der Teil mit Quarkmassen erweitert werden muss, der eine innere Quarklinie enthält. Im Detail ändern sich bei Mitnahme der Quarkmasse m die Funktionen $b(k_1, k_2)$ und $b^T(k_2, k_1)$ aus den Gleichungen (4.3) und (4.4) wie folgt [HKS⁺00]

$$\begin{aligned} b(k_1, k_2) &\rightarrow b(k_1, k_2) = \gamma^- \frac{\not{k}_{1\perp} - \not{k}_{2\perp} - m}{(q_1 - k_1)^2 - m^2} \gamma^+ - \frac{\gamma_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)}{(k_1 + k_2)^2}, \\ b^T(k_2, k_1) &\rightarrow b^T(k_2, k_1) = \gamma^+ \frac{\not{k}_{1\perp} - \not{k}_{2\perp} + m}{(q_1 - k_2)^2 - m^2} \gamma^- - \frac{\gamma_\beta \Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)}{(k_1 + k_2)^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

während der effektive 3-Gluonen-Vertex $\Gamma^{+-\beta}(q_2, q_1)$ unverändert bleibt. Die Erweiterung in den Gleichungen (4.29) äußert sich also nur in einer Modifikation des Quarkpropagators, der jetzt die Propagation eines schweren Quarks beschreibt. Bei der Berechnung der Amplitude in Gleichung (4.1) muss weiterhin beachtet werden, dass die Spinoren im Fall der schweren Quarks den Bewegungsgleichungen

$$(k_1 - m) u(k_1) = 0 \quad (4.30)$$

und

$$(k_2 + m) v(k_2) = 0 \quad (4.31)$$

genügen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die Überlegungen aus dem Abschnitt "Eichinvarianz" auch für die Produktion schwerer Quarks und der modifizierten Funktionen in Gleichungen (4.29) richtig bleiben, wenn man die Bewegungsgleichungen (4.30) und (4.31) verwendet. Die Amplitude $A^{c_2 c_1}$ der Produktion eines schweren Quark-Antiquark-Paars geht, wie auch im masselosen Fall, im Grenzwert verschwindender Transversalimpulse der Gluonen $q_{1/2\perp} \rightarrow 0$ gegen Null.

5. DIE UNINTEGRIERTE GLUONVERTEILUNG

Bei der Berechnung der Quark-Antiquark-Hadroproduktion mit Hilfe der Gleichung (3.18) für den Wirkungsquerschnitt spielen die unintegrierten Gluonverteilungsfunktionen $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$ neben der Produktionsamplitude eine entscheidende Rolle. Die Verteilungsfunktion beschreibt die innere gluonische Struktur der kollidierenden Protonen bei hohen Energien in Abhängigkeit vom longitudinalen Impulsbruchteil

$$x \equiv \frac{q^+}{P^+}$$

und dem transversalen Impuls k_\perp des Gluons. Wie gehabt ist dabei q^+ der longitudinale Impuls des Gluons und P^+ der des Protons. Bisher ist man nicht in der Lage, Verteilungsfunktionen für die uns interessierenden Bereiche von x und k_\perp^2 analytisch zu berechnen. Die unintegrierte Gluonverteilung muss daher numerisch aus experimentellen Daten extrahiert werden. Dabei macht man sich unter anderem den Zusammenhang zwischen unintegrierter und der integrierten Standard-Gluonverteilungsfunktion $g(x, Q^2)$, die durch

$$g(x, Q^2) = \int_0^{Q^2} dk_\perp^2 \frac{\mathcal{F}(x, k_\perp^2)}{k_\perp^2} \quad (5.1)$$

gegeben ist, zunutze. Weiterhin gibt es bislang keinen Formalismus, mit dem die unintegrierte Gluonverteilung phänomenologisch bei beliebig kleinem Transversalimpuls beschrieben werden kann. Aus diesem Grund führt man eine Anfangsskala Q_0 ein und schreibt [KMS91, RS94, Kwi85]

$$g(x, Q^2) = \left(\int_0^{Q_0^2} + \int_{Q_0^2}^{Q^2} \right) dk_\perp^2 \frac{\mathcal{F}(x, k_\perp^2)}{k_\perp^2} = xg(x, Q_0^2) + \int_{Q_0^2}^{Q^2} dk_\perp^2 \frac{\mathcal{F}(x, k_\perp^2)}{k_\perp^2}, \quad (5.2)$$

wodurch auf eine eindeutige Art und Weise die kleinen Transversalimpulse in die Anfangsverteilung $xg(x, Q_0^2)$ absepariert werden.

5.1 Bestimmung der unintegrierten Gluonverteilung aus F_2 -Daten

Die folgenden Ausführungen orientieren sich zum Teil an dem Artikel [KMS97] von Kwiecinski, Martin und Stasto.

Die sogenannten Protonstrukturfunktionen F_2 und F_L sind zunächst durch den Wirkungsquerschnitt der tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung definiert

$$\frac{d\sigma}{dx dQ^2} = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{xQ^4} \left[2 \left(1 - y \left(1 - \frac{y}{2} \right) \right) F_2(x, Q^2) - y^2 F_L(x, Q^2) \right],$$

siehe auch Abbildung 5-1. Dabei ist das Impulsübertragsquadrat durch $Q^2 \equiv -q^2$ gegeben, während x und y über $x \equiv Q^2 / (2p \cdot q)$ beziehungsweise $y \equiv p \cdot q / (p \cdot k)$ definiert sind. Die Strukturfunktionen F_2 und F_L parametrisieren, ähnlich wie Quark- oder Gluonverteilungsfunktionen, die analytisch unzugängliche Protonstruktur. Durch geeignete Beschleunigerexperimente ist es zum Beispiel möglich, F_2 für einen großen Bereich von x und Q^2 zu bestimmen.

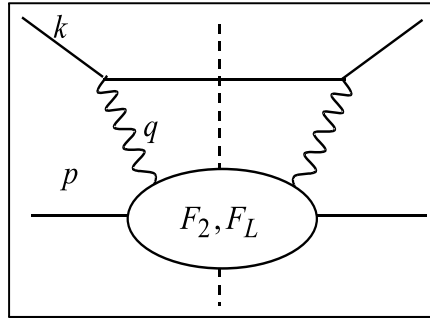


Abb. 5-1 Tiefinelastische Streuung

Im Rahmen der Faktorisierung dieses Prozesses lässt sich die Struktur des Protons in Abbildung 5-1 noch etwas weiter auflösen. Wie in Abbildung 5-2 gezeigt dissoziiert das virtuelle Photon in ein Quark-Antiquark-Paar, und die eigentliche Wechselwirkung mit dem Proton findet über die Gluonen im Proton statt, wobei die gluonische Struktur des Protons durch die unintegrierte Gluonverteilung \mathcal{F} beschrieben wird.

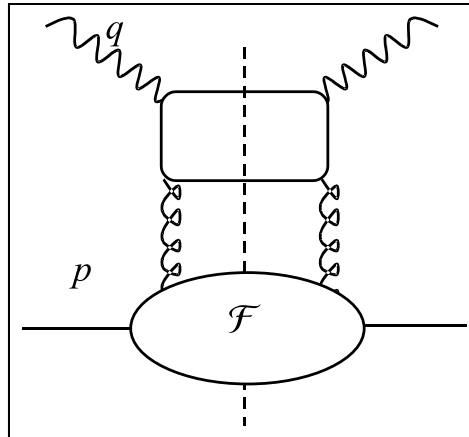


Abb. 5-2 Die unintegrierte Gluonverteilung in der TIS

Durch Vergleich der beiden Abbildungen 5-1 und 5-2 wird deutlich, dass ein

enger Zusammenhang zwischen der Strukturfunktion F_2 und der Verteilungsfunktion \mathcal{F} besteht. In Gleichungen ausgedrückt gilt

$$F_2(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 (S_q + V_q),$$

$$S_q = \int_x^1 \frac{dz}{z} \int \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} B_q(z, k_\perp^2, Q^2) \mathcal{F}\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right), \quad (5.3)$$

wobei V_q die direkte Streuung des Photons an einem Valenzquark des Protons beschreibt, und die Funktion S_q den gluonischen Beitrag aus Abbildung 5-2 liefert. Die Quarkbox im oberen Teil der Abbildung 5-2 kann analytisch berechnet werden und wird in Gleichung (5.3) durch die Funktion B_q beschrieben. Da die Gleichung (5.3) Integrale über das Produkt der Quarkbox und der unintegrierten Gluonverteilung enthält, ist es kaum möglich, von der experimentell gemessenen Strukturfunktion F_2 direkt auf die Verteilungsfunktion \mathcal{F} zu schließen. Um an dieser Stelle weiterzukommen, greift man auf sogenannte Evolutionsgleichungen für Verteilungsfunktionen zurück. Dabei handelt es sich zum Beispiel um Differential- oder Integralgleichungen für $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$. Die Gültigkeit der verschiedenen Evolutionsgleichungen beschränkt sich jeweils auf bestimmte Bereiche der Variablen x und k_\perp^2 oder Q^2 . Im Fall hoher Energien beziehungsweise kleinem x und im Prinzip beliebigem k_\perp^2 , also der MRK, erhält man die BFKL-Gleichung [KLF76, KLF77, BL78] für die unintegrierte Gluonverteilung, während für nicht zu kleine Werte von $Q^2 \gg \lambda_{QCD}^2$ und nicht-verschwindendes x die DGLAP-Gleichung [AP77] die Evolution der integrierten Verteilungsfunktionen bestimmt. Die Autoren der Arbeit [KMS97] haben nun diese beiden kinematischen Bereiche heuristisch zu der folgenden DGLAP-BFKL-Evolutionsgleichung kombiniert

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, k_\perp^2) = & \tilde{\mathcal{F}}_0\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right) + \frac{3\alpha_S(k_\perp^2)}{\pi} k_\perp^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \int_{k_{0\perp}^2} \frac{dk'_\perp{}^2}{k'_\perp{}^2} \\ & \left(\frac{\mathcal{F}\left(\frac{x}{z}, k'_\perp{}^2\right) \Theta\left(\frac{k_\perp^2}{z} - k'_\perp{}^2\right) - \mathcal{F}\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right)}{|k'_\perp{}^2 - k_\perp^2|} + \frac{\mathcal{F}\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right)}{(4k'_\perp{}^2 - k_\perp^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ & + \frac{3\alpha_S(k_\perp^2)}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{z}{6} P_{gg}(z) - 1 \right) \int_{k_{0\perp}^2}^{k_\perp^2} \frac{dk'_\perp{}^2}{k'_\perp{}^2} \mathcal{F}\left(\frac{x}{z}, k'_\perp{}^2\right) \\ & + \frac{\alpha_S(k_\perp^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{gq}(z) \Sigma\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Funktion $\tilde{\mathcal{F}}_0\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right)$ ist dabei durch den Ausdruck

$$\tilde{\mathcal{F}}_0\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right) = \mathcal{F}_0\left(\frac{x}{z}, k_\perp^2\right) + \frac{\alpha_S(k_\perp^2)}{2\pi} \int_x^1 dz P_{gg}(z) \frac{x}{z} g\left(\frac{x}{z}, k_{0\perp}^2\right) \quad (5.5)$$

gegeben. Die Terme in Gleichungen (5.4) und (5.5), die proportional zu den sogenannten Splittingfunktionen $P_{gg/q}$ sind, stammen von der DGLAP-Evolution, während der Rest im wesentlichen seinen Ursprung in der BFKL-Gleichung hat. Wichtig ist, dass als einzige wirklich unbekannte Größen nur die Anfangsskala $k_{0\perp}^2$ und die Anfangsgluonverteilung $g(x, k_{0\perp}^2)$ über Gleichung (5.5) in

die Evolutionsgleichung eingehen, siehe auch Gleichung (4.27). Aus gegebener Anfangsskala und -verteilung kann durch numerische Lösung der Integralgleichung (5.4) die unintegrierte Verteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$ für jeden Wert von x und $k_\perp^2 > k_{0\perp}^2$ berechnet werden. In [KMS97] wird für die Skala $k_{0\perp}^2$ ein Wert von $k_{0\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2$ gewählt, während man für die Gluonverteilung den 2-Parameter-Ansatz

$$xg(x, k_{0\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2) = N(1 - x)^\beta \quad (5.6)$$

verwendet. Zur Bestimmung der unintegrierten Verteilungsfunktion $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$ aus den experimentell ermittelten Daten für F_2 geht man nun wie folgt vor. Zunächst werden für die beiden Parameter N und β mehr oder weniger beliebige Werte angesetzt. Dann geht man mit dem Ansatz aus Gleichung (5.6) in die Evolutionsgleichung (5.4) und löst diese numerisch für $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$. Mit der so berechneten unintegrierten Gluonverteilung wird über Gleichung (5.3) die Strukturfunktion F_2 bestimmt und mit den Daten für einen möglichst großen Bereich von x und Q^2 verglichen. Dieses Vorgehen wird so lange iterativ für sukzessiv angepasste Werte der Parameter N und β wiederholt, bis die Abweichung zwischen den F_2 -Daten und den berechneten F_2 -Werten minimal ist. Die in diesem Sinne optimalen Werte für die Parameter lauten bei einer Anfangsskala von $k_{0\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2$ [KMS97]

$$\begin{aligned} N &= 1.57, \\ \beta &= 2.5. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Beschreibung der experimentellen F_2 -Daten durch Anwendung der k_\perp -Faktorisierung, Abbildung 5-2, und der kombinierten DGLAP-BFKL-Gleichung (5.4) sowie dem 2-Parameter-Ansatz (5.6) ist besser als vergleichbare Untersuchungen, die entweder auf der kollinearen Approximation, integrierten Verteilungsfunktionen und reiner DGLAP Evolution basieren oder deren Grundlage die alleinige BFKL-Evolution bildet. Sämtliche numerischen Auswertungen der vorliegenden Arbeit verwenden daher die in [KMS97] bestimmte unintegrierte Gluonverteilung $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$.

5.2 Bereich kleiner Transversalimpulse

Die Gleichung (3.18) für den Wirkungsquerschnitt der Quark-Antiquark-Produktion enthält, auch nach Integration der Deltafunktion, noch wenigstens ein q_\perp -Impulsintegral über eine unintegrierte Gluonverteilung $\mathcal{F}(x, q_\perp^2)$. Da die Integration in Polarkoordinaten für q_\perp^2 a priori von Null bis Unendlich läuft, die unintegrierte Verteilungsfunktion von Kwiecinski, Martin und Stasto aber nur für Transversalimpulse größer als die Anfangsskala $k_{0\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2$ gültig ist, muss die Gleichung (3.18) für eine numerische Auswertung noch etwas modifiziert werden. Die einfachste Möglichkeit bestünde darin, nur die Integrationsgrenzen zu ändern, also für die Integrale über die Gluontransversalimpulse

einen unteren Cutoff $\mu^2 = k_{0\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2$ einzuführen. Allerdings ist nicht von vornherein klar, wie wichtig die Beiträge der Amplitude bei kleinem Transversalimpuls sind, und ob durch den Cutoff nicht wesentliche Beiträge verloren gehen würden. Gestützt wird diese Vermutung durch die Untersuchungen im Abschnitt "Der kollineare Limes", in dem festgestellt wurde, dass sich der Wirkungsquerschnitt der k_\perp -Faktorisierung für kleine Transversalimpulse dem Wirkungsquerschnitt der kollinearen Faktorisierung annähert. Diese Beiträge müssen also keinesfalls klein sein und können bei kleinen Transversalimpulsen der produzierten Teilchen sogar den Wirkungsquerschnitt dominieren! Anstelle der Cutoff-Methode greifen wir daher auf die Identität (5.2) zurück und machen zunächst für das Amplitudenquadrat in Gleichung (3.18) den folgenden Ansatz [HKS⁺00]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_{1\perp}^2} (A^{c_2 c_1})^\dagger A^{c_2 c_1} \frac{1}{q_{2\perp}^2} &\equiv S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \Rightarrow \\
&S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \Theta(q_{1\perp}^2 - k_{0\perp}^2) \Theta(q_{2\perp}^2 - k_{0\perp}^2) \\
&+ \left\{ \lim_{q_{1\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right\} \Theta(k_{0\perp}^2 - q_{1\perp}^2) \Theta(q_{2\perp}^2 - k_{0\perp}^2) \\
&+ \left\{ \lim_{q_{2\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right\} \Theta(q_{1\perp}^2 - k_{0\perp}^2) \Theta(k_{0\perp}^2 - q_{2\perp}^2) \\
&+ \left\{ \lim_{q_{1,2\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right\} \Theta(k_{0\perp}^2 - q_{1\perp}^2) \Theta(k_{0\perp}^2 - q_{2\perp}^2).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Dabei ist natürlich entscheidend, dass die Grenzwerte $\lim_{q_{i\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp})$ tatsächlich existieren. Genau das wurde aber im Abschnitt "Der kollineare Limes" bewiesen und ist ein Ergebnis der Eichinvarianz der Amplitude, die sich schließlich in der Gleichung (4.25) widerspiegelt. Setzt man den Ansatz (5.8) in Gleichung (3.18) ein, lautet der Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
\sigma_{P_1 P_2 \rightarrow q \bar{q} X} &\propto \left\{ \int_{k_{0\perp}^2}^{\infty} d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp} \frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{q_{1\perp}^2} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{q_{2\perp}^2} \right. \\
&+ \int_{k_{0\perp}^2}^{\infty} d^2 q_{2\perp} x_1 g(x_1, k_{0\perp}^2) \left[\lim_{q_{1\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right] \frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{q_{2\perp}^2} \\
&+ \int_{k_{0\perp}^2}^{\infty} d^2 q_{1\perp} \frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{q_{1\perp}^2} \left[\lim_{q_{2\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right] x_2 g(x_2, k_{0\perp}^2) \\
&\left. + x_1 g(x_1, k_{0\perp}^2) \left[\lim_{q_{1,2\perp} \rightarrow 0} S(q_{1\perp}, q_{2\perp}) \right] x_2 g(x_2, k_{0\perp}^2) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Durch Anwendung der Identität (4.27) konnte der Wirkungsquerschnitt in vier Anteile zerlegt werden, die jeweils eine eindeutige Interpretation besitzen. Der erste Teil aus Gleichung (5.9) trägt sämtliche rein transversale Anteile und entspricht genau der k_\perp -Faktorisierung mit einem Cutoff $k_{0\perp}^2$ in den Integralen. Die mittleren Beiträge liefern Anteile, bei denen eines der beiden Gluonen einen Transversalimpuls mit $q_{i\perp}^2 < k_{0\perp}^2$ besitzt und dementsprechend nicht durch eine unintegrierte, sondern die Standard-Gluonverteilungsfunktion $x_i g(x_i, k_{0\perp}^2)$ bei

der Anfangsskala $k_{0\perp}^2$ beschrieben wird. Der vierte Term in Gleichung (5.9) wiederum stellt den rein kollinearen Anteil des Wirkungsquerschnitts dar. Die Anfangsverteilungen $x_i g(x_i, k_{0\perp}^2)$ entsprechen natürlich denen aus der Arbeit von Kwiecinski, Martin und Stasto, so dass mit dem Ansatz (5.6) und den Parametern aus Gleichung (5.7) der Quark-Antiquark-Produktionsquerschnitt in Gleichung (5.9) eindeutig definiert und numerisch auswertbar ist.

6. PRODUKTION SCHWERER QUARKS

6.1 Vorbemerkungen

Bevor wir an den direkten Vergleich zwischen unseren theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Ergebnissen zur Produktion schwerer Quarks in einer hochenergetischen Proton-Proton-Kollision gehen, muss die Kinematik in Bezug auf die experimentelle Situation noch etwas angepasst werden. Soweit nichts anderes gesagt wird, gelten aber nach wie vor die im Kapitel "Kinematik" getroffenen Festlegungen.

In Beschleunigerexperimenten werden zur Charakterisierung der Teilchenbahnen in der Regel die Transversalimpulse und die sogenannten Rapiditäten herangezogen. Die Rapidität y eines Teilchens ist dabei alleine durch seine longitudinalen Impulskomponenten k^+ und k^- gegeben

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k^0 + k^3}{k^0 - k^3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k^+}{k^-} \right). \quad (6.1)$$

Da die produzierten Teilchen auf der Massenschale liegen, lässt sich der Phasenraum in Gleichung (3.18) leicht mit Hilfe der Identität

$$\frac{dk_{1,2}^+}{k_{1,2}^+} = dy_{1,2}$$

auf die Rapiditäten des produzierten Quarks y_1 beziehungsweise Antiquarks y_2 umschreiben. Geht die Rapidität eines Teilchens gegen Null, verschwindet gemäß Gleichung (6.1) die dritte Impulskomponente, und das Teilchen trägt nur noch einen Transversalimpuls k_\perp , es bewegt sich also in der senkrecht zum Strahl liegenden Reaktionsebene. Weiterhin entspricht eine große positive Rapidität einer Bewegung des Teilchens in Vorwärtsrichtung, und umgekehrt ein großer negativer Wert für y einer Bewegung in Rückwärtsrichtung. Als eine direkte Folge der QMRK haben die in der Hadronkollision produzierten Fragmente X_1 und X_2 aus Abbildung 3-1 jeweils einen Gesamtimpuls, der nur gering von den Impulsen der Hadronen P_1 respektive P_2 abweicht. Folglich gilt $P_{X_1}^+ \gg P_{X_1}^-$ und $P_{X_2}^+ \ll P_{X_2}^-$, so dass die Rapidität der oberen Fragmente groß und positiv, und die Rapidität der unteren Fragmente groß und negativ sein wird.

Die longitudinalen Impulskomponenten des produzierten Quarks und Antiquarks hingegen sind in der QMRK nicht streng geordnet, was nun zur Folge hat, dass ihre Rapiditäten oder auch ihre Gesamtrapidität weder besonders groß und positiv noch groß und negativ sein müssen und in der Regel auch nicht sind. Im wesentlichen bewegt sich die Rapidität der produzierten Teilchen in der QMRK also um Null herum, $y_1 \approx y_2 \approx 0$, man spricht dann auch

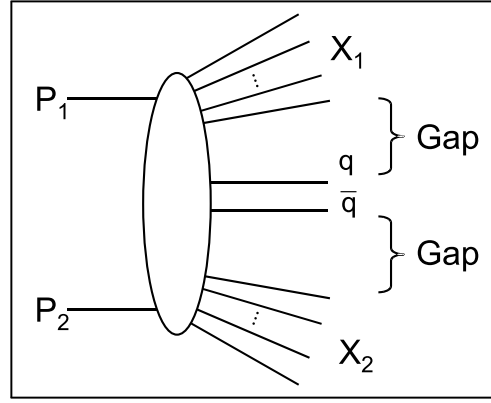


Abb. 6-1 Rapidity-Gaps

von "mid-rapidity" oder zentraler Produktion. Für die Abbildung 3-1 hat das zur Folge, dass sich zwei Rapidity-Gaps zwischen den Fragmenten und dem produzierten Teilchencluster auftun, so wie es in Abbildung 6-1 angedeutet ist. Vom Standpunkt des Experimentators im cm-System stellt sich der Prozess etwa wie in Abbildung 6-2 dar.

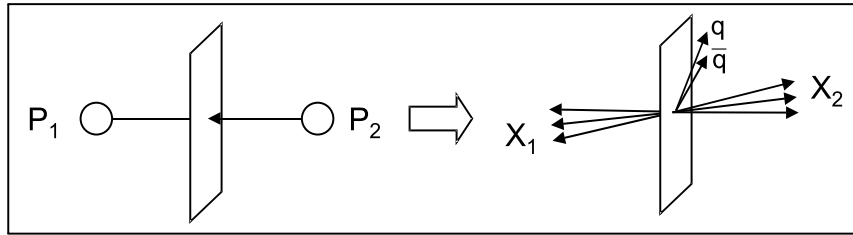


Abb. 6-2 Der Prozess im cm-System

Dabei stoßen die Hadronen mehr oder weniger zentral aufeinander, fragmentieren und produzieren ein Quark-Antiquark-Paar, das im Vergleich zu den Fragmenten eine deutlich transversalere Bewegung zeigt. Die Fragmente, die aus hunderten von Teilchen bestehen können, fliegen hingegen mehr oder weniger unbeeinflusst entlang der Strahllinie vom Stoßzentrum fort. Natürlich läuft nicht jede Hadronkollision auf diese Art und Weise ab, aber zum Vergleich mit unseren Vorhersagen in der QMRK werden wir genau solche Ereignisse wie in Abbildung 6-2 angedeutet heranziehen.

Die longitudinalen Impulsbruchteile x_1 und x_2 der Gluonen im t -Kanal lassen sich in der QMRK wie folgt durch die Rapiditäten und Transversalimpulse der produzierten Teilchen ausdrücken

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{q_1^+}{P_1^+} = \frac{k_1^+ + k_2^+}{P_1^+} = \frac{1}{\sqrt{s}} (m_{1\perp} e^{y_1} + m_{2\perp} e^{y_2}), \\ x_2 &= \frac{-q_2^-}{P_2^-} = \frac{k_1^- + k_2^-}{P_2^-} = \frac{1}{\sqrt{s}} (m_{1\perp} e^{-y_1} + m_{2\perp} e^{-y_2}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

wobei die transversalen Massen $m_{1/2\perp}$ durch

$$m_{1,2\perp} \equiv \sqrt{m_{1,2}^2 + k_{1,2\perp}^2}$$

definiert sind.

Um die spätere numerische Auswertung zu erleichtern, soll nun das Betragsquadrat der Fadin-Lipatov-Amplitude aus Gleichungen (4.1) und (4.2) etwas näher untersucht werden. Zunächst finden wir mit Hilfe der Zerlegung aus Gleichung (4.17) und nach Summation $\sum_{i,j}$ über die Farbindices i und j der produzierten Quarks den Ausdruck

$$\begin{aligned} (A^{c_2 c_1})^\dagger A^{c_2 c_1} &= \frac{g^4}{4} \left\{ \left(N_c \frac{1}{N_c^2} (N_c^2 - 1) + \frac{1}{2} \frac{40}{3} \right) \right. \\ &\quad \times [\bar{v}_{s_2} (b^\dagger - b^{T\dagger}) u_{s_1} \bar{u}_{s_1} (b - b^T) v_{s_2}] \\ &\quad \left. + N_c \frac{1}{2} (N_c^2 - 1) [\bar{v}_{s_2} (b^\dagger + b^{T\dagger}) u_{s_1} \bar{u}_{s_1} (b + b^T) v_{s_2}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dabei wurde zur Vereinfachung der Notation die Abhängigkeit von den Impulsen des Quarks k_1 und des Antiquarks k_2 unterdrückt. Da wir zunächst nicht an der Produktion von Teilchen mit bestimmten Spinausrichtungen s_1 und s_2 interessiert sind, kann jetzt über diese Spinvariablen in Gleichung (6.3) summiert werden. Mit den Projektionsoperatoren

$$\begin{aligned} \sum_{s_1} u_{s_1}(k_1) \bar{u}_{s_1}(k_1) &= \not{k}_1 + m_1, \\ \sum_{s_2} v_{s_2}(k_2) \bar{v}_{s_2}(k_2) &= \not{k}_2 - m_2 \end{aligned}$$

und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{Tr} \left\{ [\not{k}_2 - m_2] (b^\dagger [\not{k}_1 + m_1] b + b^{T\dagger} [\not{k}_1 + m_1] b^T) \right\}, \\ B &\equiv \text{Tr} \left\{ [\not{k}_2 - m_2] (b^\dagger [\not{k}_1 + m_1] b^T + b^{T\dagger} [\not{k}_1 + m_1] b) \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

ergibt sich im Falle der QCD mit $N_c = 3$ die Gleichung

$$\sum_{s_1, s_2} (A^{c_2 c_1})^\dagger A^{c_2 c_1} = \frac{g^4}{4} \left\{ \frac{28}{3} (A - B) + 12 (A + B) \right\}. \quad (6.5)$$

An dieser Stelle kann man sich fragen, warum wir nicht den expliziten und vollständigen Ausdruck der rechten Seite der Gleichung (6.5) angegeben, so wie es zum Beispiel für Amplitudenquadrate in der kollinearen Faktorisierung allgemein üblich ist. Dabei sollte man sich vergegenwärtigen, dass dazu in einem ersten Schritt die Gleichungen (4.3), (4.4), (4.5) und (4.6) in die Gleichungen (6.4) eingesetzt, anschließend zu deren Auswertung eine große Zahl von Spuren über Produkte von maximal acht Gammamatrizen berechnet und diese letztendlich in Gleichung (6.5) eingesetzt werden müssten. Wegen der relativ großen Zahl von unabhängigen Variablen und nicht-verschwindender Transversalimpulse entsteht auf diesem Weg ein tatsächlich seitenlanger Ausdruck mit vielen Kombinationen von Skalarprodukten der Quark- und Gluonimpulse. Eine analytische Auswertung per Hand ist somit zwar nicht ausgeschlossen, aber

unpraktisch. Vielmehr lassen sich Amplitudenquadrate wie in Gleichung (6.5) recht gut mit algebraischen Computerprogrammen wie Mathematica und dem Zusatzpaket TRACER zur Berechnung der Spuren behandeln. Die Richtigkeit und Eichinvarianz des finalen Ausdrucks lässt sich dann sogar analytisch durch den Grenzwert verschwindender Gluontransversalimpulse entsprechend Gleichung (4.23) überprüfen.

6.2 Erste Vergleiche mit dem Experiment

Um die Hochenergie-Bedingungen in Gleichung (2.8) wenigstens approximativ erfüllen zu können, sollten die zu beschreibenden Experimente, wie bereits mehrfach erwähnt, eine möglichst hohe cms-Gesamtenergie \sqrt{s} besitzen. Diese Forderung kann, vielleicht abgesehen von Experimenten mit kosmischer Strahlung, nur von Proton-Proton-Kollidern erfüllt werden. Sogenannte fixed-target Aufbauten, bei denen Protonen auf ein festes oder gasförmiges Target geschossen werden, haben eine Strahlenergie von einigen hundert GeV, und die entsprechende cms-Gesamtenergie \sqrt{s} liegt dann bei einigen zehn GeV, was für die QMRK viel zu niedrig ist. Der CERN $S\bar{p}p$ S-Kollider hingegen erreichte in Proton-Antiproton-Kollisionen Energien von $\sqrt{s} = 630$ GeV, und am Fermilab TeVatron-Kollider wurden bisher im Run I Protonen und Antiprotonen bei $\sqrt{s} = 1800$ GeV aufeinander geschossen. Um einschätzen zu können, wie gut oder schlecht die QMRK bei diesen Energien ist, berechnet man mit Hilfe der Gleichungen (6.2) für typische Werte der Rapidität, Massen und Transversalimpulse den longitudinalen Impulsbruchteil der Gluonen und vergleicht diesen Wert mit $x = 1$. Im Fall der Bottom-Quark-Produktion und bei Transversalimpulsen der produzierten Teilchen von 8 GeV findet man für zentrale Prozesse ein typisches x von $x \approx 0.03$ für CERN-Energien und $x \approx 0.01$ für TeVatron-Energien. Bei kleineren Transversalimpulsen kommt man zu Werte von etwa $x \approx 10^{-3}$ herunter. Ob man damit tatsächlich im "small- x " Bereich liegt, lässt sich nur schwer sagen. Wichtig ist, dass die wesentliche und häufig verwendete Näherung

$$\frac{1}{1-x} \approx 1$$

bei diesen x -Werten einen relativ kleinen intrinsischen Fehler von $1 - 10\%$ nach sich zieht. Dieser Fehler entspricht natürlich nicht direkt einem theoretischen Fehler für den Wirkungsquerschnitt, weil die Näherungen der QMRK an ganz unterschiedlichen Stellen in die Rechnungen eingegangen sind. In diesem Zusammenhang ist es von Bedeutung, dass die unintegrierten Gluonverteilungsfunktionen für Werte von $x \approx 0.1$ sehr schnell gegen Null streben und nur für sehr kleine x einen wesentlichen Beitrag liefern, wodurch man zusätzlich gegen eine unbeabsichtigte falsche Anwendung der QMRK geschützt ist.

Alle folgenden numerischen Rechnungen basieren auf der Gleichung (5.9) beziehungsweise (3.18) für den Wirkungsquerschnitt, der NLLA-BFKL Quark-Antiquark-Produktionsamplitude in Gleichung (4.29), (4.5), (6.4) und (6.5)

und der unintegrierten Gluonverteilung von Kwiecinski, Martin und Stasto sowie den zugehörigen Anfangsbedingungen in Gleichung (5.6) und (5.7). Das Amplitudenquadrat wurde mit einem selbstentwickeltem, auf Mathematica aufbauendem Programm und mit Hilfe der TRACER-Routine [JL93] analytisch berechnet. Für die Auswertung des Wirkungsquerschnittes ist eine numerische Integration über bis zu sieben unabhängige Variablen nötig, die mit der Monte-Carlo-Integrationsroutine VEGAS [Lep] und einem FORTRAN-Programm durchgeführt wurde. Sowohl auf analytischer als auch numerischer Ebene wurde die Eichinvarianz der Rechnung gemäß den Überlegungen aus dem Abschnitt "Eichinvarianz" beziehungsweise der Gleichung (4.23) durch Bildung des Limes $q_{1,2\perp} \rightarrow 0$ überprüft.

Man sollte sich immer vergegenwärtigen, dass die in diesem und den folgenden Abschnitten diskutierten experimentellen Daten einen langen Weg vom Detektor bis zum Wirkungsquerschnitt hinter sich haben. Abgesehen von Detektoreffizienzen, -akzeptanzen und so weiter, die zu Unsicherheiten in den Ergebnissen führen, ist zum Beispiel die Messung von Bottomquarks rein indirekt. Es werden letztendlich Myonen μ^- und Antimyonen μ^+ im Detektor selektiert, und nur über die Zerfallskanäle

$$\begin{aligned} b &\rightarrow \mu, \\ b &\rightarrow J/\Psi \rightarrow \mu, \\ b &\rightarrow c + \mu, \\ c &\rightarrow \mu \end{aligned}$$

und die Kinematik der Ereignisse versucht man, auf die Produktionsraten der Bottomquarks zu schließen. Dabei gehen zahlreiche Modellvorstellungen, Annahmen und Näherungen ein, die sich zum Teil in den recht großen Fehlerbalken niederschlagen.

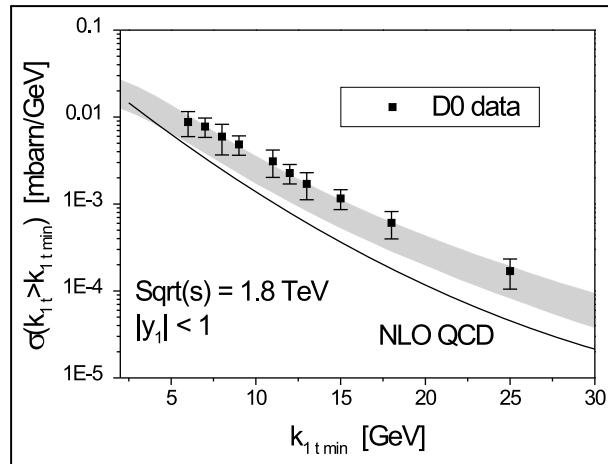


Abb. 6-3 Bottom-Quark-Produktion am TeVatron

In Abbildung 6-3 werden unsere theoretischen Ergebnisse der k_{\perp} -Faktorisierung zur Produktion eines Bottomquarks [HKS⁺00] mit experimentellen Daten der D0-Kollaboration vom TeVatron [A⁺00a] und NLO Rechnungen in der

kollinearen Approximation $[N^+]$ verglichen. Dabei ist die Produktionsrate eines einzelnen Bottom-Quarks identisch mit der über das \bar{b} -integrierten Produktionsrate eines entsprechenden $b\bar{b}$ -Paares. Der Wirkungsquerschnitt in Abbildung 6-3 ist semi-differentiell im Betrag des Transversalimpulses $k_{1\perp}$ des Bottomquarks und durch den "cut" $|y_1| < 1$ auf den mittleren Rapiditätsbereich beschränkt. Das graue Band entspricht der Vorhersage der k_{\perp} -Faktorisierung und gibt einen ungefähren Maßstab für die theoretische Unsicherheit dieser Rechnung an. Es entsteht aus der Variation verschiedener Konstanten, durch die ein maximaler und ein minimaler Wert für den Wirkungsquerschnitt erreicht werden kann, also die Ober- und Untergrenzen des Bandes. Die Konstanten bestehen hier wie auch in den folgenden Rechnungen aus der Masse des Bottomquarks m_b , dem Wert der starken Kopplungskonstanten $\alpha_S(Q^2)$ sowie deren Skalenabhängigkeit Q^2 . Es ist allgemein üblich, die Größe der Kopplung aus der fundamentalen QCD-Skala λ_{QCD} und der Skalenvariablen Q^2 über die in der führenden Ordnung gültigen Beziehung

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2n_f) \ln(\frac{Q^2}{\lambda_{QCD}^2})} \quad (6.6)$$

zu bestimmen. Die Konstante λ_{QCD} legt auf diesem Weg den Wert von $\alpha_S(Q^2)$ bei gegebenem Q^2 fest. Die QCD-Skala λ_{QCD} wurde in zahlreichen Experimenten bestimmt und hängt von der Anzahl $n_f = 1 - 6$ der aktiven Quarksorten ab, die zur Beschreibung der Experimente verwendet werden. Aktive Quarksorten sind dabei diejenigen, die zum Beispiel in Quarkloops auftreten und einen relevanten Beitrag liefern. Die Skala Q^2 kann im Rahmen der Störungstheorie leider nicht eindeutig festgelegt werden. Sicherlich hängt sie eng mit den Impulsen der Teilchen zusammen, die mit $\alpha_S(Q^2)$ aneinander koppeln, allerdings können auch Quark- oder andere Teilchenmassen eine Rolle spielen. Wichtig ist, dass beim Vergleich der Beschreibung verschiedener Experimente strukturell die gleiche Q^2 -Abhängigkeit verwendet wird. Wir wählen den häufig verwendeten Zusammenhang [KMS97]

$$Q^2 = c (q_{i\perp}^2 + m^2). \quad (6.7)$$

Die Konstante c in Gleichung (6.7) liegt dabei im allgemeinen zwischen $1/2$ und 2 , und $q_{i\perp}^2$ ist das Impulsquadrat des an der Kopplung beteiligten Gluons. Die Masse m entspricht hier zum Beispiel der Bottomquarkmasse m_b . Das graue Band in Abbildung 6-3 steht für eine Variation der Quarkmasse im Rahmen der experimentellen Unsicherheit, $4.5 \text{ GeV} < m_b < 4.9 \text{ GeV}$, bei gleichzeitiger Änderung der QCD-Skala, $100 \text{ MeV} < \lambda_{QCD}^{n_f=5} < 180 \text{ MeV}$, während wir die Konstante c bei einem Wert von $c = 1$ belassen.

Wie in Abbildung 6-3 deutlich zu sehen ist, liegt die mittlere Vorhersage der k_{\perp} -Faktorisierung [HKS⁺00] im Rahmen des experimentellen Fehlers und liefert eine sowohl quantitativ als auch qualitativ saubere Beschreibung der Daten. Bei allen Werten des Transversalimpulses $k_{1\perp}$ gibt die k_{\perp} -Faktorisierung die Steigung der experimentellen Daten korrekt wieder. Im Gegensatz dazu fällt die Vorhersage der kollinearen NLO Rechnung mit zunehmendem Transversalimpuls zu stark ab und liegt bei $k_{1\perp} = 25 \text{ GeV}$ bereits etwa einen Faktor 3 unterhalb der Daten.

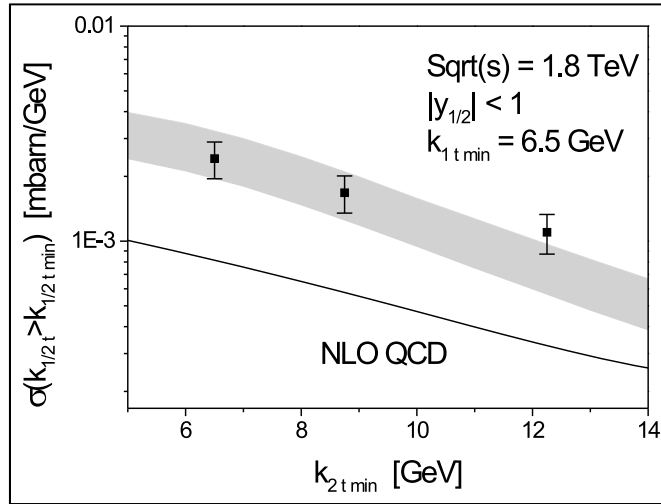


Abb. 6-4 Bottom-Antibottom-Korrelationen I

Während der semi-differentielle Wirkungsquerschnitt in Abbildung 6-3 prinzipiell noch durch kollineare LO Rechnungen beschrieben werden könnte, da das nicht observierte Antiquark den Transversalimpuls des Quarks ausgleichen kann, muss im Fall von Quark-Antiquark-Korrelationen die volle NLO-Dynamik und Kinematik zum Tragen kommen. Dazu wurden ebenfalls am TeVatron von der CDF-Kollaboration experimentelle Untersuchungen durchgeführt [A⁺97a]. Der Vergleich mit den gemessenen Daten ist in den Abbildungen 6-4 und 6-5 dargestellt [HKS⁺00].

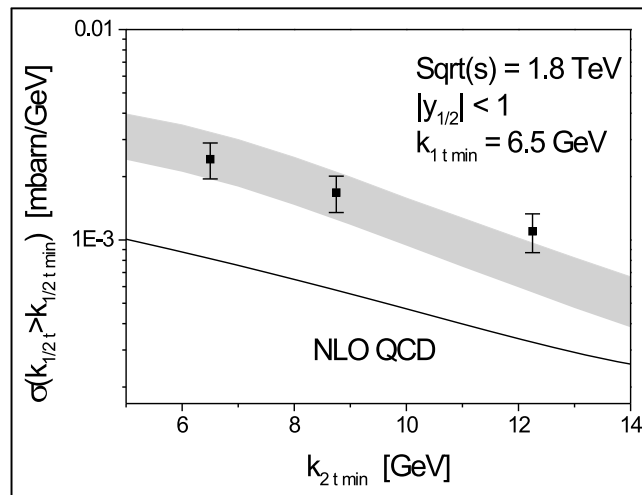


Abb. 6-5 Bottom-Antibottom-Korrelationen II

Der Transversalimpuls des Bottomquarks wurde dabei jeweils von unten fixiert und beschränkt, während die untere Grenze des Antiquarkimpulses beliebig variiert. Es werden also tatsächlich Korrelationen zwischen Quark- und Antiquark gemessen. Das graue Band der Vorhersage im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung zeigt auch hier eine hervorragende Übereinstimmung mit den Daten, und bis auf den letzten Datenpunkt in Abbildung 6-4 liegen die Rech-

nungen komplett innerhalb des experimentellen Fehlers. Dabei ist ausdrücklich zu erwähnen, dass unsere theoretischen Vorhersagen keine freien Parameter enthalten. Die Ergebnisse der kollinearen NLO-Rechnungen [N⁺, A⁺97a] unterschätzen den gemessenen Wirkungsquerschnitt hingegen teilweise fast um einen Faktor 4 und können nur den Verlauf der Daten einigermaßen gut wiedergeben. Die Quark- und Antiquark Rapiditäten in Abbildungen 6-4 und 6-5 sind durch die cuts auf den mittleren Bereich beschränkt, so dass die Anwendung der QMRK und die daraus folgende Interpretation wie in Abbildungen 6-1 und 6-2 gerechtfertigt und bei den hohen cms-Energien auch notwendig ist.

Der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen vom CERN *SppS*-Kollider ist insgesamt etwas problematischer, da hier die Energie um einen Faktor 3 niedriger ist, und somit die longitudinalen Impulsbruchteile x beider Gluonen, wie oben gezeigt, im Mittel größer als am TeVatron sind und eher in Richtung $x \approx 0.1$ gehen. In diesem Bereich gerät die QMRK eindeutig an ihre Grenzen.

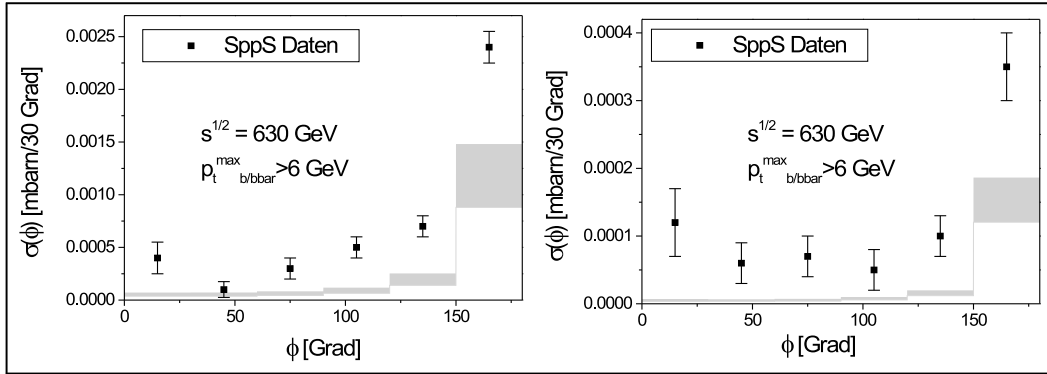


Abb. 6-6 Winkelkorrelationen am *SppS*-Kollider

Das zeigt sich auch beim Vergleich mit experimentellen Daten von Winkelkorrelationen [A⁺94] zwischen dem Quark und Antiquark in Abbildung 6-6. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen den Transversalimpulsen der produzierten Teilchen. Auch wenn die theoretischen Ergebnisse in der k_{\perp} -Faktorisierung den Trend der Daten, insbesondere den kollinearen Peak bei $\phi = 180^{\circ}$, zufriedenstellend wiedergeben, wird der Wirkungsquerschnitt insgesamt unterschätzt. Hier liegt die Vermutung nahe, dass die QMRK relevante Teile des zur Verfügung stehenden Phasenraums zu stark einschränkt und so den Wirkungsquerschnitt drückt. Leider sind uns zur Zeit keine entsprechenden Daten für TeVatron-Energien bekannt, so dass man an dieser Stelle über die Unzulänglichkeit der QMRK bei $\sqrt{s} = 630$ GeV nur spekulieren kann. Die NLO Vorhersagen der kollinearen Approximation [A⁺94] hingegen scheinen die Winkelkorrelationen in Abbildung 6-6 akzeptabel zu beschreiben.

Die Vorhersagen der k_{\perp} -Faktorisierung zur Produktion eines Bottom-Antibottom-Paares in Proton-Proton-Kollisionen bei TeVatron-Energien in den Abbildungen 6-3, 6-4 und 6-5 liefern neben der im Rahmen der Fehlerbalken guten quantitativen Übereinstimmung insgesamt eine sehr zufriedenstellende qualitative Beschreibung der Daten. Durch die Mitnahme der intrinsischen Gluontransversalimpulse $q_{1/2\perp}$ und Verzicht auf die kollineare Approximation werden

bereits in führender Ordnung in der Kopplungskonstanten die Korrelationen des Quarks und des Antiquarks korrekt wiedergegeben. Der beträchtliche Einfluss des effektiven Vertex aus Abbildung 4-5 insbesondere bei k_{\perp} -differentiellen Wirkungsquerschnitten wird an dieser Stelle zum ersten mal überhaupt getestet und kann unter anderem für die wesentliche Verbesserung der Steigung der theoretischen Kurve in Abbildung 6-3 im Vergleich zur kollinearen Rechnung verantwortlich gemacht werden. Die Ursache für das schwächere Abfallen der Kurve hat seinen Ursprung in der Gleichung (4.5) für den effektiven Vertex, genauer in den Faktoren $t_1 = q_{1\perp}^2$ beziehungsweise $t_2 = q_{2\perp}^2$, die natürlich eine deutliche Auswirkung auf die Steigung des differentiellen Wirkungsquerschnittes haben.

6.3 Vorhersagen für zukünftige Experimente

Ermutigt durch diese ersten Erfolge bei der Anwendung der k_{\perp} -Faktorisierung auf hochenergetische Hadronkollisionen und mit dem Wissen, dass die Anwendung der QMRK bei noch höheren Energien die Physik solcher Prozesse prinzipiell immer besser beschreibt, wagen wir uns nun an die Vorhersage einiger Wirkungsquerschnitte für kommende Experimente am TeVatron und dem L(arge)H(adron)C(ollider) am CERN. Der TeVatron-Beschleuniger wird zur Zeit erweitert und im Run II voraussichtlich eine CMS-Energie von 1.96 TeV besitzen. Der LHC ist noch im Bau und wird ab 2005 den Betrieb mit einer Energie von $\sqrt{s} = 14$ TeV aufnehmen. Die bei diesen hohen Energien zu erreichenden Werte des longitudinalen Impulsbruchteils x der Gluonen im Nukleon sind dann so klein, dass die Beschreibung der Prozesse mit Hilfe des von uns verwendet Formalismus, also der QMRK und der k_{\perp} -Faktorisierung sowie der Verwendung effektiver Vertices, nicht nur gerechtfertigt sondern geradezu notwendig erscheint.

In den Abbildungen 6-7, 6-8 und 6-9 sind Vorhersagen für die beiden Energien am TeVatron im Run II und am LHC für typische Observable wie Rapiditäten, Winkelkorrelationen und k_{\perp} -differentielle Wirkungsquerschnitte gezeigt. Im Vergleich mit den Ergebnissen bei $\sqrt{s} = 1.8$ TeV bemerkt man eine deutliche Zunahme der absoluten Werte der Wirkungsquerschnitte bis zu einer Größenordnung. Der Verlauf der Kurven ändert sich jedoch mit zunehmender Energie nicht besonders signifikant.

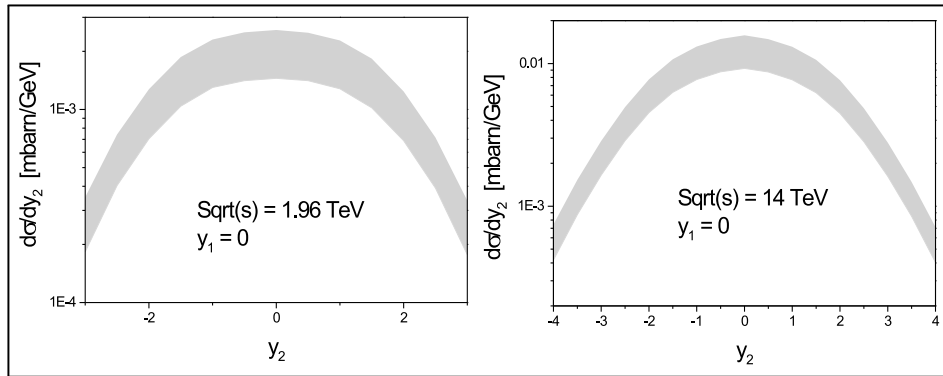


Abb. 6-7 Rapidityverteilungen für TeVatron II und LHC.

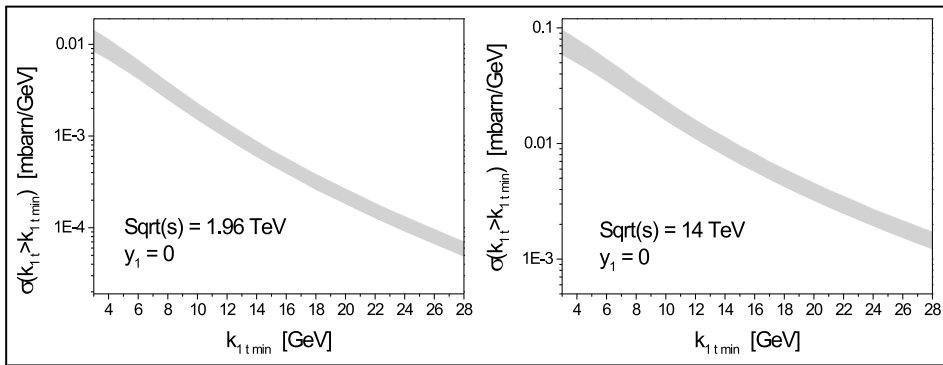


Abb. 6-8 P_{\perp} -Verteilungen für TeVatron II und LHC

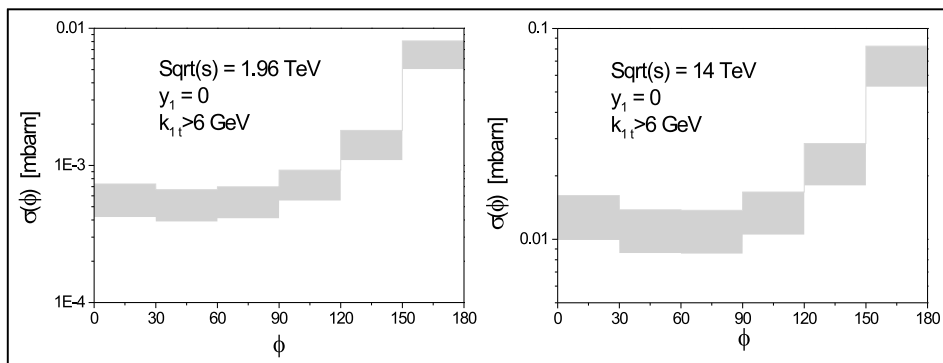


Abb. 6-9 Winkelkorrelationen für TeVatron II und LHC

7. PRODUKTION VON GEBUNDENEN ZUSTÄNDEN

Seit das J/Ψ -Meson 1974 in der berühmten "Novemberrevolution" unabhängig von den Gruppen von C.C. Ting in Brookhaven und B. Richter am SLAC entdeckt wurde, war es Gegenstand unzähliger Untersuchungen und Publikationen. Zur Zeit wird die sogenannte J/Ψ -Unterdrückung [MS86], damit ist eine Unterdrückung der J/Ψ -Produktion in Kernmaterie beziehungsweise dem hypothetischen Quark-Gluon-Plasma gemeint, stark als eines der deutlichsten Signale für das Bestehen eines Quark-Gluon-Plasmas diskutiert. Hochinteressant und wichtig ist in diesem Zusammenhang natürlich die Frage, wie gut man eigentlich die Produktion solcher schweren Mesonen, auch Quarkonia genannt, ausserhalb von Kernmaterie, also in einem vergleichsweise sauberen Proton-Proton-Stoß, verstanden hat. Vor Beginn der J/Ψ -Produktionsexperimente am TeVatron war die Beschreibung der experimentellen Daten durch QCD-Rechnungen in NLO in der kollinearen Approximation bei relativ niedrigen Energien noch recht zufriedenstellend. Das änderte sich allerdings schlagartig mit der Veröffentlichung der ersten Ergebnisse zur Hadroproduktion des J/Ψ 's und weiterer schwerer Mesonen bei $\sqrt{s} = 1.8$ TeV, siehe Abbildung 7-1 [A⁺97b, Abe].

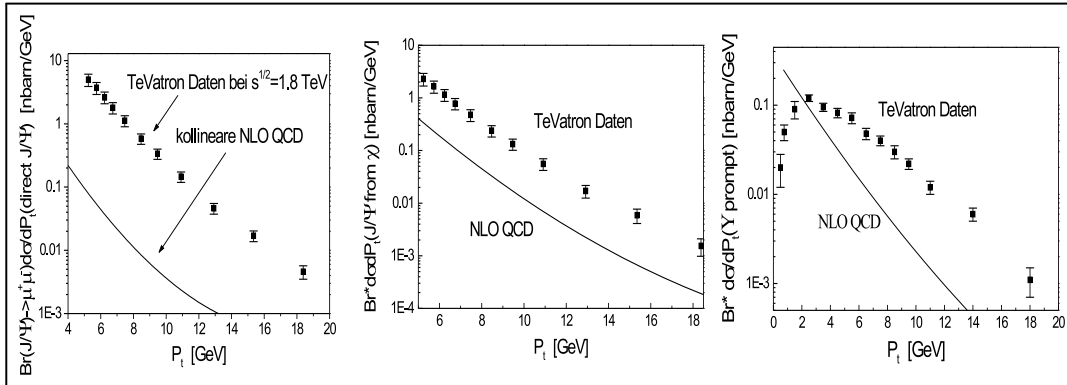


Abb. 7-1 NLO QCD Rechnungen im Vergleich zu Daten vom TeVatron

Man stellt fest, dass die Vorhersagen der QCD bis zu einem Faktor 50 unterhalb der Daten liegen. Da die experimentellen Ergebnisse im Rahmen der Fehlerbalken als bestätigt gelten, muss es also auf der Seite der Theorie einen fundamentalen Fehler im Verständnis des Produktionsmechanismus geben. In diesem Kapitel ist es nun unser Ziel, die Produktion schwerer Mesonen im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung zu untersuchen und auf diesem Weg zu einem besseren Verständnis und einer teilweisen Lösung des Rätsels der Quarkonium-Produktion zu kommen.

7.1 Bezeichnungen

Quarkonia sind gebundene Zustände eines schweren Quarks q und Antiquarks \bar{q} . Im folgenden werden wir uns auf sogenannte Charmonia und Bottomonia, das sind also $c\bar{c}$ - und $b\bar{b}$ -Zustände, beschränken. Zunächst zeigt sich experimentell, dass gebundene Zustände aus schweren Quarks, ähnlich wie in der Atomspektroskopie auch, über Massen und Drehimpulsquantenzahlen klassifiziert werden können. Ein J/Ψ -Meson ist ein Charmonium und in der spektroskopischen Notation ein 3S_1 -Zustand, wobei das Symbol

$$^{2S+1}L_J$$

die Quantenzahlen Bahndrehimpuls $L = 0(= S), 1(= P), 2(= D), \dots$, den Gesamtspin S und den Gesamtdrehimpuls J anzeigt. Die Parität P und die C-Parität beziehungsweise Ladungskonjugation C des gebundenen Zustands sind dann durch

$$\begin{aligned} P &= (-1)^{L+1}, \\ C &= (-1)^{L+S} \end{aligned} \tag{7.1}$$

gegeben und stellen im Rahmen der QCD erhaltene Quantenzahlen dar. Neben dem J/Ψ -Teilchen mit der Ladungskonjugation $C = -1$ spielen im weiteren Verlauf dieser Arbeit die χ -Mesonen eine besondere Rolle. Das sind 3P_J -Zustände mit positiver Ladungskonjugation entsprechend Gleichung 7.1. Während die χ -Mesonen im Charm und Bottom-Fall ihren Namen behalten und einen Index $\chi_{c/b}$ bekommen, nennt man das Analogon zum J/Ψ im Bottom-Sektor Υ .

7.2 Farbsinglett-Produktionsmechanismus

Um den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines schweren Mesons in einem hochenergetischen Proton-Proton-Stoß berechnen zu können, muss in einem ersten Schritt wieder gezeigt beziehungsweise angenommen werden, dass der Prozess faktorisiert. Die Faktorisierung ist nun komplizierter als im Fall der Produktion eines nicht-gebundenen Quark-Antiquark-Paares, denn neben der Protonstruktur soll auch die nur begrenzt analytisch zugängliche Struktur des produzierten gebundenen Mesonzustands faktorisiert werden können. Das zugehörige Diagramm ist in Abbildung 3-2 gegeben. Setzen wir die Faktorisierung voraus, lässt sich zunächst die Form der Gleichung (3.18) des Quark-Antiquark-Wirkungsquerschnittes übernehmen, wobei jetzt allerdings nur ein Teilchen, das Quarkonium, mit dem Impuls $P = k_1 + k_2$ produziert wird und die Amplitude $A^{c_1 c_2}$ durch die neue Amplitude $A^{c_1 c_2}(^{2S+1}L_J)$ ersetzt werden muss, welche die Produktion des gebundenen $^{2S+1}L_J$ -Zustands beschreibt. Bezüglich

des Quark-Antiquark-Paares ist es insgesamt sinnvoll, zu den Relativkoordinaten P und Q überzugehen

$$\begin{aligned} P &= k_1 + k_2, \\ Q &= k_1 - k_2. \end{aligned}$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion des Quarkoniums lautet dann

$$\begin{aligned} \sigma_{P_1 P_2 \rightarrow {}^{2S+1}L_J X} &= \frac{1}{8(2\pi)} \int \frac{d^3 P}{P^+} d^2 q_{1\perp} d^2 q_{2\perp} \delta^2(q_{1\perp} - q_{2\perp} - P_\perp) \times \\ &\quad \frac{\mathcal{F}(x_1, q_{1\perp})}{(q_{1\perp}^2)^2} \frac{(A^{c_1 c_2}({}^{2S+1}L_J))^\dagger A^{c_2 c_1}({}^{2S+1}L_J)}{(N_c^2 - 1)^2} \frac{\mathcal{F}(x_2, q_{2\perp})}{(q_{2\perp}^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Amplitude $A^{c_1 c_2}({}^{2S+1}L_J)$ geht dabei durch Projektion aus der bereits bekannten $q\bar{q}$ -Produktionsamplitude $A^{c_1 c_2}$ hervor

$$A^{c_1 c_2}({}^{2S+1}L_J) = \mathcal{P}(q\bar{q} \rightarrow {}^{2S+1}L_J) \bullet A^{c_1 c_2}, \quad (7.3)$$

wobei der Operator $\mathcal{P}(q\bar{q} \rightarrow {}^{2S+1}L_J)$ das Quark-Antiquark-Paar sowohl kinematisch als auch in Bezug auf die Quantenzahlen Drehimpuls und Farbe auf den gebundenen Zustand projiziert. Bezüglich der Kinematik spielt es hierbei eine große Rolle, dass der produzierte Zustand aus zwei schweren Quarks besteht. Im Ruhesystem des Quarkoniums $\vec{P} = \vec{0}$, von dem aus wir jetzt argumentieren wollen, postulieren man, dass die Kinematik des Quark-Antiquark-Systems aufgrund der relativ großen Quarkmassen von einigen GeV nichtrelativistisch ist. Dann kann eine Geschwindigkeit v durch die nichtrelativistischen Beziehungen $Q_0 \simeq Mv^2$ oder $\vec{Q}^2 \simeq M^2 v^2$ mit Hilfe der Relativenergie Q_0 , der Quarkoniummasse M und des Relativimpulses \vec{Q} definiert werden, wobei für die Geschwindigkeit $v^2 \ll 1$ gilt. Zusammengefasst ergibt das die übliche nichtrelativistische Beziehung zwischen Relativenergie und -impuls der Form

$$Q_0 \simeq \frac{\vec{Q}^2}{M}, \quad (7.4)$$

woraus sofort folgt, dass die relativistische Invariante $Q^2 \simeq -(Mv)^2 + \mathcal{O}(v^4)$ gegenüber dem Quadrat der Quarkoniummasse M^2 vernachlässigbar ist. Weiterhin entscheidend für unsere gesamte Rechnung ist, dass sowohl Quark als auch Antiquark jeweils auf der Massenschale liegen, sonst gäbe es unter anderem massive Probleme mit der Eichinvarianz. Im Rahmen dieser Näherungen gilt dann

$$\begin{aligned} (P + Q)^2 &= 4k_1^2 = P^2 + Q^2 + 2k_1^2 - 2k_2^2 \Rightarrow \\ P^2 &= 4m^2 + Q^2 \approx 4m^2 \equiv M^2, \end{aligned}$$

wodurch das Quarkonium automatisch auf die Massenschale gesetzt wird, und seine Masse M näherungsweise durch die Summe der Quark- und Antiquarkmasse $M = 2m$ gegeben ist.

In der Gleichung (7.3) für die Amplitude darf der Relativimpuls Q natürlich nicht mehr auftreten. Er muss unter Beachtung der Beziehung (7.4) ausintegriert werden.

Die Drehimpulskopplung erfolgt in zwei Schritten. Zunächst müssen die Spins von Quark und Antiquark über Clebsch-Gordon-Koeffizienten zum Spin des Quarkoniums verbunden werden. Anschließend erfolgt eine Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls zum Gesamtdrehimpuls des Quarkoniums. Da das Quarkonium keine Farbladung trägt, wird die Amplitude zusätzlich auf einen Farbsinglett-Zustand projiziert. Die, wenn man so will, innere Struktur des Quarkoniums selbst wird durch eine Wellenfunktion beschrieben.

Unter Beachtung sämtlicher eben aufgeführter Punkte ergibt sich für Gleichung (7.3) [HKS⁺01b, GKPR80, BR83]

$$\begin{aligned}
A^{c_1 c_2}(^{2S+1}L_J) &= \mathcal{P}(q\bar{q} \rightarrow ^{2S+1}L_J) \bullet A^{c_1 c_2} \\
&= \sum_{s_1, s_2} \sum_{L_z, S_z} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \delta\left(Q_0 - \frac{\vec{Q}^2}{M}\right) \frac{1}{\sqrt{m}} \Phi_{L, L_z}(Q) \times \\
&\quad \langle L, L_z, S, S_z | J, J_z \rangle \left\langle \frac{1}{2}, s_1, \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \right\rangle \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}} \times \\
&\quad \bar{u}_{s_1}(k_1) \psi_{ij}^{c_2 c_1} v_{s_2}(k_2).
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Dabei stellt die Deltafunktion die nichtrelativistische Kinematik entsprechend Gleichung (7.4) sicher, während die nichtrelativistische Wellenfunktion des Quarkoniums im Impulsraum durch $\Phi_{L, L_z}(Q)$ gegeben ist. Die Drehimpulskopplung erfolgt in Gleichung (7.5) wie angekündigt über die Clebsch-Gordon-Koeffizienten $\langle \dots \rangle$, und an Stelle einer Entwicklung des Vertex in Farbsinglett- und Oktett-anteile bezüglich der Quarkfarbindices i und j

$$\psi_{ij}^{c_2 c_1} = \delta_{ij} \frac{\text{Tr}(\psi^{c_2 c_1} \delta)}{N_c} + \dots \tag{7.6}$$

wird hier direkt auf den Singlettanteil projiziert

$$\psi_{ij}^{c_2 c_1} \rightarrow \frac{\text{Tr} \psi^{c_2 c_1}}{\sqrt{N_c}}, \tag{7.7}$$

was für das Quadrat der Amplitude selbstverständlich auf das Gleiche hinausläuft. Dabei beziehen sich die Spuren in Gleichungen (7.6) und (7.7) auf die Farbindices $i, j = 1..N_c$. Üblicherweise wird der in der Spur auftretende Ausdruck

$$\mathcal{P}_{S_z} \equiv \sum_{s_1, s_2} \left\langle \frac{1}{2}, s_1, \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \right\rangle v_{s_2}(k_2) \otimes \bar{u}_{s_1}(k_1) \tag{7.8}$$

auch als Spinprojektionsoperator identifiziert und definiert. Der Faktor $1/\sqrt{m}$ in Gleichung (7.5) dient letztendlich der Normierung und sorgt für die richtige Massendimension der Wellenfunktion.

Die Gleichungen (7.2) und (7.5) stellen den Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen der Quarkoniumproduktion dar. Dabei ist die einzig neue und unbekannte Größe die nichtrelativistische Wellenfunktion $\Phi_{L, L_z}(Q)$, die wir gleich noch etwas unter die Lupe nehmen werden.

Die wichtigsten Punkte dieses Abschnittes sind die nichtrelativistischen Approximation bei der Behandlung des Quark-Antiquark-Zustandes, die schließlich die Beschreibung und Faktorisierung des Prozesses gemäß Gleichung (7.5) ermöglichen, und die Tatsache, dass ein Farbsinglett-Zustand produziert wird. Diese letzte Aussage verdient besondere Beachtung im Hinblick auf den effektiven Vertex aus Gleichung (4.2). Da die Farbmatrizen spurfrei sind, $Tr T^c = 0$, folgt aus der Zerlegung des Matrixprodukts in Gleichung (4.17) und der Projektion in Gleichung (7.7), dass nur die in den Gluonfarbindices c_1 und c_2 symmetrischen Anteile, genauer die Anteile proportional zu $\delta^{c_1 c_2}$, einen nicht verschwindenden Beitrag zur Amplitude liefern. Wie im Abschnitt "Eichinvarianz" diskutiert, hat der in c_1 und c_2 antisymmetrische effektive Vertex aus Abbildung 4-5 also für die Produktion eines Farbsingletts überhaupt keine Bedeutung, was man auch sofort an den verschiedenen Beiträgen in Abbildung 4-7 erkennt. Die Produktion von Farbsinglett-Quarkonia wird damit auch in der k_\perp -Faktorisierung vollständig durch den Standard-Feynmangraphen aus Abbildung 4-3 beschrieben. Bei einem Vergleich mit der Farbsinglettproduktion in der kollinearen Approximation kommt also einzig und allein der Umstand zur Geltung, dass in der k_\perp -Faktorisierung die Transversalimpulse der Gluonen mitgenommen werden und die Protonstruktur durch eine unintegrierte Verteilungsfunktion beschrieben wird. In diesem Sinne hebt sich die Produktion von Singlett-Quarkonia deutlich von der Produktion offener Charm- oder Bottomquarks ab, bei der die effektiven Anteile, wie bereits diskutiert, eine offensichtlich wichtige Rolle spielen, was besonders aus der Steigung der theoretischen Vorhersage in Abbildung 6-3 ersichtlich wird.

7.3 Produktion von P-Wellen

Wegen der relativ großen Bedeutung des J/Ψ -Mesons wäre es natürlich naheliegend, als erstes die Produktion von 3S_1 -Zuständen im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung zu untersuchen. Wie eben gesehen tragen in führender Ordnung in der Kopplungskonstanten nur Feynmangraphen des Typs aus Abbildung 4-3 zur Singlett-Amplitude bei. In diesem Graphen koppeln die Gluonen, abgesehen von den Farbmatrizen, strukturell gesehen wie Photonen an die Quarks. An sich besitzen Gluonen, im Gegensatz zu Photonen, keine wohldefinierte C -Parität, allerdings kann man ihnen in diesem eingeschränkten Fall der Singlettproduktion eine Ladungskonjugation von $C = -1$ zuweisen. Da das J/Ψ -Mesons ebenfalls eine negative C -Parität besitzt, kann es also nicht in führender Ordnung durch zwei Gluonen mit $C = -1$ produziert werden, so wie in Abbildung 7-2 angedeutet. Selbstverständlich lässt sich auch durch eine direkte Rechnung zeigen, dass die Amplitude $A^{c_1 c_2}(^3S_1)$ in führender Ordnung verschwindet. Der Übergang zu höheren Ordnungen der Störungstheorie erfordert einige zusätzliche Überlegungen, die wir in einem späteren Abschnitt anstellen werden.

Anstelle der Produktion einer S -Welle, so lautet der gebräuchliche Jargon,

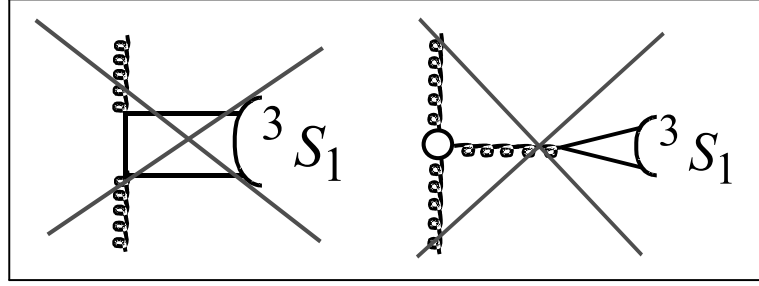


Abb. 7-2 3S_1 -Farbsinglett-Produktion

mit negativer C -Parität werden wir uns also zunächst mit der Produktion von 3P_J -Wellen mit $C = +1$ befassen. Um die Amplitude in Gleichung (7.5) noch etwas zu vereinfachen und einer weiteren analytischen beziehungsweise numerischen Behandlung zugänglich zu machen, kommt jetzt ein weiteres mal die nichtrelativistische Näherung für das schwere Quark-Antiquark-Paar zum Einsatz. Aufgrund der Beziehung $\vec{Q}^2 \simeq M^2 v^2$ ist klar, dass die typischen Werte für den Relativimpuls \vec{Q} klein gegenüber der Masse des Quarkoniums sind. Diese Aussage wird noch unterstützt durch die Vorstellung, dass eine Bindung zwischen Quark und Antiquark natürlich nur dann zustande kommt oder erhalten bleibt, wenn \vec{Q} sehr klein ist. Aus diesem Grund ist es naheliegend, den Ausdruck unter dem Q -Integral in Gleichung (7.5) in einer Taylorreihe um einen verschwindenden Relativimpuls $\vec{Q} = \vec{0}$ herum zu entwickeln. Doch zunächst wird der Projektionsoperator aus Gleichung (7.8) in eine wesentlich praktischere Form gebracht, denn mit dem Polarisationsensor $\epsilon(S_z)$ gilt

$$\mathcal{P}_{S_z} = -\frac{1}{2^{3/2}m} (\not{k}_2 - m) \not{\epsilon}(S_z) (\not{k}_1 + m), \quad (7.9)$$

so dass ein Teil der Amplitude (7.5) entsprechend

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2} \left\langle \frac{1}{2}, s_1, \frac{1}{2}, s_2 | S, S_z \right\rangle \bar{u}_{s_1}(k_1) \psi_{ij}^{c_2 c_1}(k_2) \\ &= -\frac{1}{2^{3/2}m} \text{Tr} \left\{ \psi_{ij}^{c_2 c_1} (\not{k}_2 - m) \not{\epsilon}(S_z) (\not{k}_1 + m) \right\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

vereinfacht werden kann. Dieser Ausdruck lässt sich wie in Abbildung 7-3 interpretieren und stellt in diesem Sinne den Produktionsvertex eines Teilchens mit ganzzahligem Spin dar, das über einen Standard-Fermion-Vektorteilchen-Vertex γ_μ an die Quarks koppelt.

Da die Wellenfunktion noch ausintegriert werden kann, genügt es an dieser Stelle, nur die Spur $\text{Tr} \{ \dots \}$ aus Gleichung (7.10) um $\vec{Q} = \vec{0}$ zu entwickeln [BR83]

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \psi_{ij}^{c_2 c_1} (\not{k}_2 - m) \not{\epsilon}(S_z) (\not{k}_1 + m) \right\} \\ &= \text{Tr} \{ \dots \}_{\vec{Q}=\vec{0}} + \left(\frac{\partial}{\partial \vec{Q}} \text{Tr} \{ \dots \} \right)_{\vec{Q}=\vec{0}} \cdot \vec{Q} + \mathcal{O}(\vec{Q}^2). \end{aligned} \quad (7.11)$$

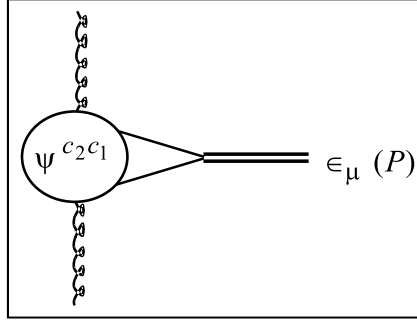


Abb. 7-3 Quarkonium-Produktion in führender Ordnung

Nun zeigt sich zum Beispiel durch eine explizite Rechnung, dass der erste Term der Taylorreihe (7.11), eingesetzt in die Amplitude (7.5), für P -Wellen verschwindet und damit keinen Beitrag zur χ -Produktionsamplitude liefert, was auch mit der bekannten Tatsache korreliert ist, dass P -Wellen generell am Ursprung verschwinden. Erst der zweite Term proportional zum Relativimpuls hat die richtige Symmetrie in \vec{Q} und muss bei der Berechnung der Produktionsamplitude mitgenommen werden. Die S -Wellen hingegen liefern in führender Ordnung $\mathcal{O}(\vec{Q}^0)$ einen Beitrag, nicht aber zur nächsten Ordnung $\mathcal{O}(\vec{Q}^1)$. Die Reihenentwicklung in Gleichung (7.11) selektiert also in diesem Sinne die Beiträge von S -Wellen und P -Wellen heraus. Im Falle der 0.ten Ordnung beziehungsweise der S -Welle bleibt direkt das \vec{Q} -Integral über die Wellenfunktion übrig

$$\int \frac{d^3\vec{Q}}{(2\pi)^3} \Phi_{L=0, L_z=0}(\vec{Q}),$$

was durch Umschreiben der Wellenfunktion in den Ortsraum mit dem radialen Anteil $\mathcal{R}(r)$ und Kugelflächenfunktionen sowie Transformation in Kugelkoordinaten zu

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \mathcal{R}(0) \quad (7.12)$$

vereinfacht werden kann. Für die P -Wellen muss bei der Integration der Impuls \vec{Q} berücksichtigt werden, und nach der gleichen Methode wie in der führenden Ordnung erhält man

$$\int \frac{d^3\vec{Q}}{(2\pi)^3} \vec{Q}_\alpha \Phi_{L=1, L_z}(\vec{Q}) = -i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \epsilon_\alpha(L_z) \mathcal{R}'(0). \quad (7.13)$$

Die Entwicklung der harten Amplitude um $\vec{Q} = \vec{0}$ und die anschließende Integration erlauben es also, die Produktionsamplitude für S -Wellen in der Ordnung $\mathcal{O}(\vec{Q}^0)$ bis auf die Wellenfunktion am Ursprung $\mathcal{R}(0)$, und für P -Wellen in der Ordnung $\mathcal{O}(\vec{Q}^1)$ bis auf die Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung $\mathcal{R}'(0)$ sowie einen analytisch zu berechnenden Anteil zurückzuführen. Der Wirkungsquerschnitt für die hochenergetische Produktion von χ -Quarkonia in einer Proton-Proton-Kollision nimmt dann folgende faktorisierte Form an

$$\sigma_\chi \propto \mathcal{F} \times A^\dagger A \times \mathcal{F} \times |\mathcal{R}'(0)|^2. \quad (7.14)$$

Der entscheidende Wesenszug der Faktorisierung in Gleichung (7.14) liegt erneut darin, dass die radialen Wellenfunktionen am Ursprung universell sind und die Produktion beziehungsweise den Zerfall von Quarkonia in jeder beliebigen faktorisierenden Reaktion beschreiben. Die zunächst unbekannten Konstanten $\mathcal{R}(0)$ und $\mathcal{R}'(0)$ können mit Hilfe verschiedener Modelle und Potentiale numerisch durch Lösung der Schrödingergleichung aus Zerfallskonstanten der Quarkonia berechnet werden [EQ95]. Die Zerfallskonstanten hingegen sind schon vor Jahren experimentell bestimmt und tabelliert worden. Man findet sie unter anderem im Particle Data Booklet (PDA) [G⁺00].

Setzt man die Gleichungen (7.13) und (7.11) in die Amplitude aus Gleichung (7.5) ein, kann die Summe \sum_{L_z, S_z} über die Clebsch-Gordon-Koeffizienten und die beiden Polarisationsensoren $\epsilon(L_z)$ und $\epsilon(S_z)$ unter Verwendung der Identitäten [GKPR80]

$$\begin{aligned}
\sum_{L_z, S_z} \langle 1, L_z, 1, S_z | 0, 0 \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} \right) \\
&\equiv -\sqrt{\frac{1}{3}} P_{\mu\nu}, \\
\sum_{L_z, S_z} \langle 1, L_z, 1, S_z | 1, J_z \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{P^\alpha}{M} \epsilon^\beta(J_z), \\
\sum_{L_z, S_z} \langle 1, L_z, 1, S_z | 2, J_z \rangle \epsilon_\mu(L_z) \epsilon_\nu(S_z) &= \epsilon_{\mu\nu}(J_z)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

für die verschiedenen Gesamtspins oder Drehimpulse $J = 0, 1, 2$ ausgeführt werden. Die Polarisation oder Spinausrichtung des Quarkoniums χ_J ist dabei durch die Variable $J_z = -J, \dots, J$ gegeben und prinzipiell frei wählbar. Je nachdem, ob ein Spin 1 oder ein Spin 2 Teilchen produziert wird, erfolgt die Beschreibung gemäß den Gleichungen (7.15) über den Polarisationsensor $\epsilon_\mu(J_z)$ erster Stufe oder den Polarisationsensor $\epsilon_{\mu\nu}(J_z)$ zweiter Stufe. Unabhängig davon, ob wir im weiteren Verlauf polarisierte oder unpolarisierte Quarkonium-Produktion betrachten, lässt es sich zum Glück immer vermeiden, mit expliziten Darstellungen der Polarisationsensoren zu arbeiten. Im unpolarisierten Fall findet man mit Hilfe der Gleichungen (7.15) für die quadrierte Amplitude (7.5) Ausdrücke der Form

$$\begin{aligned}
\left| A_{\chi_1}^{\text{unpol.}} \right|^2 &\equiv \sum_{J_z=-1,0,1} \left| A^{c_1 c_2}(^3P_1) \right|^2 \propto \sum_{J_z} \epsilon_\mu(J_z) \epsilon_\nu(J_z), \\
\left| A_{\chi_2}^{\text{unpol.}} \right|^2 &\equiv \sum_{J_z=-2,\dots,2} \left| A^{c_1 c_2}(^3P_1) \right|^2 \propto \sum_{J_z} \epsilon_{\mu\nu}(J_z) \epsilon_{\alpha\beta}(J_z),
\end{aligned}$$

die ohne Umwege durch Anwendung der sehr nützlichen Beziehungen [GKPR80]

$$\begin{aligned}
\sum_{J_z} \epsilon_\mu(J_z) \epsilon_\nu(J_z) &= P_{\mu\nu}, \\
\sum_{J_z} \epsilon_{\mu\nu}(J_z) \epsilon_{\alpha\beta}(J_z) &= \frac{1}{2} (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + P_{\mu\beta} P_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3} P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

explizit und vollständig durch den Gesamtimpuls P_μ des Quarkoniums entsprechend der Definition für $P_{\mu\nu}$ aus Gleichung (7.15) ausgedrückt werden können. In einem späteren Abschnitt werden wir uns mit der Produktion polarisierter Quarkonia beschäftigen und dann Gleichungen angeben, mit denen die Produkte der Polarisationsstensoren ähnlich wie in den Gleichungen (7.16), nur für verschiedenen Spinausrichtungen, geschlossen behandelt werden können.

Mit den Gleichungen (7.2), (7.5), (7.10), (7.11), (7.13), (7.15) und (7.16) steht nun das gesamte analytische Material zur Verfügung, um die Hadroproduktion von χ_J -Quarkonia in führender Ordnung in α_s im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung zu berechnen.

7.3.1 Das Landau-Yang-Theorem

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Produktion gebundener Zustände zum Teil aufgrund von gewissen Auswahlregeln beziehungsweise Erhaltungssätzen bestimmter Quantenzahlen eingeschränkt. In diese Richtung geht auch das Landau-Yang-Theorem, welches die Produktion eines reellen Teilchens mit Drehimpuls oder Spin $J = 1$ durch Fusion von zwei ebenfalls auf der Massenschale liegenden $J = 1$ -Teilchen verbietet. In unserem Fall sind die primären fusionierenden Teilchen Gluonen, siehe auch Abbildung 7-4.

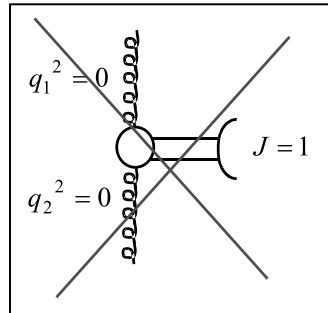


Abb. 7-4 Das Landau-Yang-Theorem im Fall der Gluonfusion

Prinzipiell findet das Landau-Yang-Theorem zum Beispiel Anwendung bei der Produktion von $\chi_{J=1}$ -Quarkonia. Entscheidend für seine Gültigkeit ist aber, dass die Gluonen in Abbildung 7-4 tatsächlich auf der Massenschale liegen, und das ist im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung und der QMRK ja gerade nicht der Fall! In der kollinearen Faktorisierung hingegen werden die Gluonen auf die Massenschale gesetzt, weswegen das Landau-Yang-Theorem dann in LO Störungstheorie die Produktion von $\chi_{J=1}$ -Zuständen bei hohen Energien verbietet. Die sofort daraus folgende Vorhersage, dass die totalen Produktionsquerschnitte von $\chi_{J=0^-}$ und $\chi_{J=2^-}$ -Teilchen gegenüber der $\chi_{J=1^-}$ -Produktion dominieren, wurde schon früh durch experimentelle Beobachtungen widerlegt. Dieser Umstand wird teilweise zur Betonung der Relevanz von NLO-Korrekturen in der kollinearen Faktorisierung herangezogen, kann aber

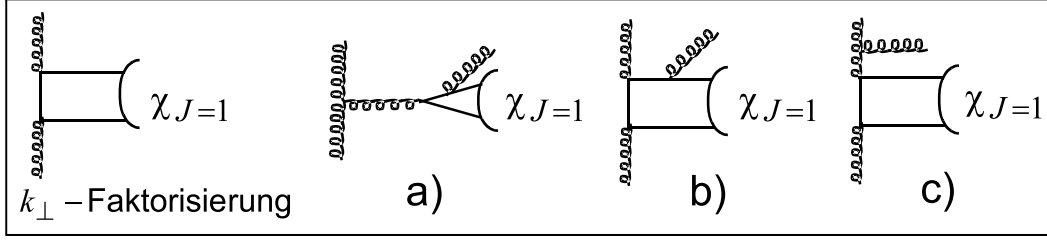


Abb. 7-5 Diagramme der 3P_1 -Produktion in k_{\perp} - und kollinearer Faktorisierung

auch als ein weiteres Argument gegen den Einsatz der kollinearen Approximation für diese Prozesse angesehen werden. Die Abbildung 7-5 macht die Vorteile der k_{\perp} -Faktorisierung gegenüber der kollinearen Faktorisierung bezüglich der $\chi_{J=1}$ -Produktion nochmal deutlich [HKS⁺01b]. Unabhängig davon, ob totale oder P_{\perp} -differentielle Wirkungsquerschnitte zu berechnen sind, müssen in der kollinearen Näherungen die drei NLO-Graphen a), b) und c) berücksichtigt werden, während im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung ein einziger Standard-Feynmangraph den Prozess in LO vollständig beschreibt. Spätestens im Vergleich mit experimentellen Daten werden wir sehen, ob die Virtualität der Gluonen in der k_{\perp} -Faktorisierung ausreicht, um das Landau-Yang-Theorem genügend außer Kraft zu setzen und so hinreichend große $\chi_{J=1}$ -Wirkungsquerschnitte zu erhalten.

7.3.2 Vergleich mit dem Experiment

Anfang bis Mitte der 90er Jahre wurde am TeVatron von der CDF-Kollaboration die Produktion von Charm- χ -Quarkonia, kurz χ_c , untersucht. Wie auch im Fall der Produktion eines offenen schweren Quark-Antiquark-Paares werden dabei die Quarkonia nicht direkt, sondern über ihre Zerfallsprodukte detektiert. Die möglichen Zerfallskanäle der χ_{cJ} -Mesonen sind dabei vielfältig und werden in die hadronische beziehungsweise radiative Kategorie eingeteilt. Experimentell ist man bei Kolliderenergien bisher nur in der Lage, die radiativen Zerfälle zur Rekonstruktion des Prozesses heranzuziehen. Es zeigt sich, dass die χ_{cJ} dabei mehrheitlich ein Photon abstrahlen und in ein J/Ψ -Teilchen übergehen

$$\begin{aligned}\chi_c &\rightarrow J/\Psi + \gamma, \\ ^3P_J &\rightarrow ^3S_1 + \gamma.\end{aligned}\tag{7.17}$$

Die entsprechenden radiativen Verzweungsverhältnisse BR , branching ratios, sind laut PDB [G⁺00] durch

$$\begin{aligned}BR(\chi_{c0} \rightarrow J/\Psi + \gamma) &\cong 6.6 \times 10^{-3}, \\ BR(\chi_{c1} \rightarrow J/\Psi + \gamma) &\cong 27.3 \times 10^{-1}, \\ BR(\chi_{c2} \rightarrow J/\Psi + \gamma) &\cong 13.5 \times 10^{-1}\end{aligned}\tag{7.18}$$

gegeben. Deutlich zu erkennen ist dabei das im Vergleich zu den anderen etwa um zwei Größenordnungen unterdrückte Verzweungsverhältnis von χ_{c0} in ein

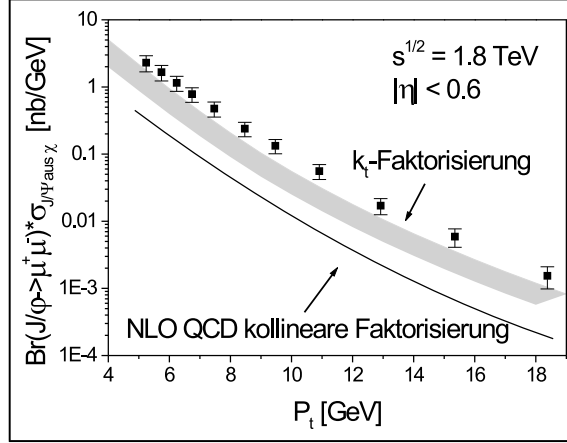


Abb. 7-6 Ergebnisse für die Quarkonium-Produktion

J/Ψ und ein Photon. Aus diesem Grund hat die Produktion von χ_{c0} auf die gemessenen Wirkungsquerschnitte kaum Einfluss und wird uns zunächst auch nicht weiter beschäftigen. Die P -Wellen mit $J = 1$ und $J = 2$ hingegen stellen eine wichtige J/Ψ -Quelle dar.

Während das abgestrahlte Photon aus dem Prozess (7.17) direkt detektiert wird, verwendet man im Experiment zur Bestimmung der J/Ψ -Rate wieder die Myonen μ^\pm aus dem Zerfall $J/\Psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. Das Verzweigungsverhältnis für den Zerfall des J/Ψ 's in ein Myonenpaar ist dabei

$$BR(J/\Psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-) \cong 6 \times 10^{-1}.$$

Durch gleichzeitige Messung der Myonen und Photonen ist es möglich, auf die Produktionsraten der J/Ψ aus χ_c -Zerfällen zu schließen, und durch Einbeziehung der bekannten Verzweigungsverhältnisse in Gleichungen (7.18) können auf diesem Weg die Wirkungsquerschnitte der χ_c 's bestimmt werden. Spätestens bei differentiellen Wirkungsquerschnitten, zum Beispiel als Funktion des Transversalimpulses des Quarkoniums, muss prinzipiell noch die Zerfallsdynamik der Photonabstrahlung (7.17) berücksichtigt werden. Da in diesem Zerfall der Transversalimpuls des Photons allerdings nur bei einigen hundert MeV liegt, werden wir im weiteren Verlauf die Transversalimpulse der J/Ψ 's und χ_c 's nicht unterscheiden und $P_{J/\Psi \perp} \approx P_{\chi_c \perp} = P_\perp$ setzen.

Für die Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung aus Gleichung (7.13) greifen wir auf die Werte aus der Arbeit von Eichten und Quigg [EQ95] zurück und verwenden die numerische Lösung der nichtrelativistischen Schrödingergleichung für das QCD- motivierte Potential von Buchmüller und Tye [BT81], was für eine Charmquarkmasse von $m_c = 1.48$ GeV einen Wert von $|\mathcal{R}'(0)|^2 = 0.075$ GeV⁵ ergibt. Die Quarkmasse und der Wert für die Wellenfunktion sind in diesem Fall also aneinander gebunden und können nicht unabhängig verändert werden. Um einen Eindruck der theoretischen Unsicherheit zu erhalten, ist es daher sinnvoll, neben der QCD-Skala auch die Konstante c in der Skalendefinition in Gleichung (6.7) zu variieren. Das numerische Ergebnis in Abbildung 7-6 für die k_\perp -Faktorisierung ist dann durch maximale und minimale Werte des Wirkungsquerschnitts bei Variation von $\lambda_{QCD}^{n_f=4}$ im Bereich

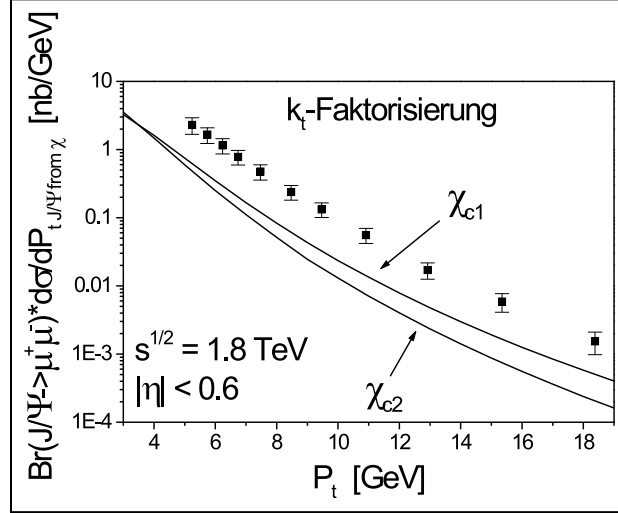


Abb. 7-7 Die individuellen Beiträge

$120 \text{ MeV} < \lambda_{QCD}^{n_f=4} < 220 \text{ MeV}$ und c im Bereich $0.5 < c < 2$ entstanden. Der χ_c -Wirkungsquerschnitt ist die Summe der χ_{c1} - und χ_{c2} -Querschnitte, gewichtet mit den entsprechenden Verzweungsverhältnissen aus Gleichung (7.18). Anstatt in der Rapidität y wurde experimentell ein Cut in der Pseudorapidität η durchgeführt, die durch

$$\eta \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{P_0^2 - M^2} + P_3}{\sqrt{P_0^2 - M^2} - P_3} \right)$$

definiert ist.

Obwohl die Vorhersagen der k_\perp -Faktorisierung [HKS⁺01b] in Abbildung 7-6 etwa einen Faktor zwei unterhalb der Daten [Abe] liegen, sind sie immer noch deutlich besser als die Ergebnisse der kollinearen Faktorisierung in NLO [CL96b]. Die qualitative Übereinstimmung ist über den ganzen gemessenen Bereich von $P_{\chi_c\perp}$ hervorragend. Berücksichtigt man den zusätzlichen Transversalimpuls von einigen hundert MeV aus dem Zerfallsprozess in Gleichung (7.17), verschiebt sich unsere Vorhersage in Abbildung 7-6 etwas nach links zu höheren Transversalimpulsen hin, und die quantitative Übereinstimmung wird besser. Besonders interessant wird es nun im Hinblick auf die einzelnen χ_{c1} - beziehungsweise χ_{c2} -Beiträge, da der χ_{c1} -Wirkungsquerschnitt, wie im Abschnitt "Landau-Yang-Theorem" ausführlich diskutiert, nur durch virtuelle Gluonen zustande kommt und so ein wesentliches Element der k_\perp -Faktorisierung testet.

Das erstaunliche Ergebnis ist in Abbildung 7-7 zu sehen [HKS⁺01b]. Während bei kleinen Transversalimpuls P_\perp die χ_{c1} - und χ_{c2} -Wirkungsquerschnitte fast gleich groß sind, beginnt ab etwa $|P_\perp| = 4 \text{ GeV}$ der χ_{c1} -Beitrag immer deutlicher zu dominieren! Das Landau-Yang-Theorem ist also maximal außer Kraft gesetzt worden, und die Relevanz virtueller Gluonen im t -Kanal tritt deutlich zutage. Experimentell wurde zwar kein differentieller Wirkungsquerschnitt für die individuellen Drehimpulsbeiträge gemessen, allerdings hat man

aus den Daten ein Verhältnis R der totalen Wirkungsquerschnitte extrahiert [Abe]

$$R = \frac{\sigma_{\chi_{c2}}}{\sigma_{\chi_{c1}} + \sigma_{\chi_{c2}}} \Big|_{\text{exp}} \approx 0.5. \quad (7.19)$$

Dieser Wert steht in sehr guter Übereinstimmung mit den Resultaten der k_{\perp} -Faktorisierung, wenn man als Näherung für das theoretische Ergebnis das Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte aus Abbildung 7-7 bei kleinem Transversalimpuls, zum Beispiel bei $|P_{\perp}| = 3 \text{ GeV}$, verwendet. Im Mittel sind die Produktionsraten für χ_{c1} -Mesonen wie χ_{c2} -Mesonen also etwa gleich, was der kollinearen Faktorisierung in LO vollkommen widerspricht, die ein Verhältnis von $R = 1$ vorhersagt.

Mit einem erneuten Blick auf die Abbildung 7-5 wird deutlich, dass die k_{\perp} -Faktorisierung und die QMRK an dieser Stelle einen klaren Vorteil gegenüber der kollinearen Näherung besitzen. Bei hohen Energien und spätestens dann, wenn der Gluonenaustausch dominiert, ist die kollineare oder auch partonische Herangehensweise ein ungünstiger Ansatz. Um die tatsächliche Physik richtig beschreiben zu können, müssen die fusionierenden Teilchen sowohl einen endlichen Transversalimpuls besitzen als auch virtuell sein. In der QMRK ist dies automatisch gegeben, während in der kollinearen Approximation Virtualität und Transversalimpuls erst durch die Abstrahlung eines Gluons, also NLO-„Korrekturen“, erzeugt werden müssen.

7.4 Lösung des Rätsels der J/Ψ -Produktion?

Unser Vergleich zwischen der χ_c -Produktion in der k_{\perp} -Faktorisierung und der kollinearen Approximation im letzten Abschnitt gibt Anlass zu der Hoffnung, dem Rätsel der Produktion schwerer Mesonen bei hohen Energien, siehe Abbildung 7-1, auf die Spur zu kommen. Der Wirkungsquerschnitt der k_{\perp} -Faktorisierung in Abbildung 7-6 liegt immerhin fast einen Faktor 4 höher als die NLO-Rechnungen und damit nur knapp unterhalb der Daten. Die große Frage ist nun, ob im Falle der J/Ψ -Produktion die k_{\perp} -Faktorisierung ebenfalls in der Lage sein wird, einen wesentlich größeren Wirkungsquerschnitt als die kollinearen Rechnungen zu liefern. Immerhin müsste hier ein Faktor 50 aufgeholt werden, wobei man sich allerdings nochmal ins Gedächtnis rufen sollte, dass die Produktion von J/Ψ -Mesonen in der k_{\perp} -Faktorisierung auch nach NLO-Rechnungen verlangt, und zum jetzigen Zeitpunkt gar nicht klar ist, wie Amplituden in dieser Ordnung Störungstheorie im Rahmen der QMRK zu berechnen sind. Um diesen wichtigen Fragen näherzukommen, werden wir uns in den folgenden Abschnitten mit der Produktion von S -Wellen, also auch dem J/Ψ , im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung befassen.

7.4.1 Produktion von S -Wellen

Wie im Abschnitt über die Produktion von P -Wellen bereits ausführlich diskutiert wurde, können im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung 3S_1 -Mesonen wegen ihrer negativen C -Parität nur in NLO Störungstheorie produziert werden. Im weiteren werden wir uns auf die Ordnung α_s^3 für den Wirkungsquerschnitt beschränken, denn Korrekturen höherer Ordnung sind bislang nicht einmal in der, im Prinzip einfacher zu handhabenden, kollinearen Faktorisierung vollständig berechnet worden und stellen in der QMRK eine echte Herausforderung dar. Worin liegen nun die Schwierigkeiten bei der Berechnung des α_s^3 -Wirkungsquerschnittes? Alles hängt erneut von der Frage nach der Eichinvarianz ab. Wie in der Abbildung 3-9 bereits veranschaulicht wurde, sind im Rahmen der QMRK nicht alle äußeren Linien auf der Massenschale, und die Anwendung der normalen Feynmanregeln liefert in der Regel keine eichinvariante Antwort. Das Ziel ist also, genauso wie im Abschnitt über den effektiven Vertex, einen eichinvarianten Ausdruck für den drei-Teilchen Produktionsvertex $\psi_{gg \rightarrow q\bar{q}g}$ in Abbildung 7-8 zu bestimmen.

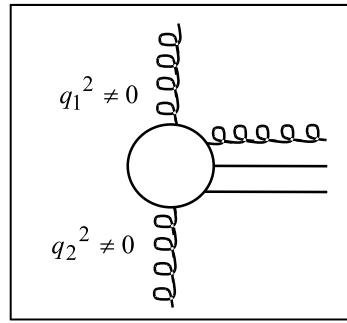


Abb. 7-8 Die gesuchte NNLLA-Amplitude

Im Zusammenhang mit der BFKL-Terminologie würde $\psi_{gg \rightarrow q\bar{q}g}$ einem NNLLA¹-Vertex entsprechen. Obwohl in den letzten Jahrzehnten unter großen Anstrengungen sämtliche NLLA-BFKL-Korrekturen, zu denen ja auch der effektive Quark-Antiquark-Produktionsvertex zählt, berechnet wurden, scheint zum jetzigen Zeitpunkt eine explizite Herleitung des Produktionsvertex aus Abbildung 7-8 im Rahmen der QMRK leider noch in weiter Ferne. Damit ist aber unser Vorhaben noch nicht zum Scheitern verurteilt, denn wir benötigen nicht die allgemeinste Form des drei-Teilchen-Produktionsvertex, da in unserem Fall die Quark-Antiquark-Linien auf einen ganz speziellen Zustand projiziert werden. Unter Umständen könnte es möglich sein, dass in Folge der Projektion auf die J/Ψ -Quantenzahlen die wirklich komplizierten Anteile aus dem NNLLA-Vertex gar keinen Beitrag liefern. Die Auswahlregeln, die an dieser Stelle zur Verfügung stehen, sind durch die negative C -Parität und den Farbsinglett-Charakter des produzierten Teilchens gegeben.

In Abbildung 7-9 sind alle NLO Feynmandiagramme aufgeführt, die generell zur J/Ψ -Produktion beitragen könnten [HKS⁺01a]. Die beiden Graphen a)

¹next-to-next-to-leading-logarithmic-approximation

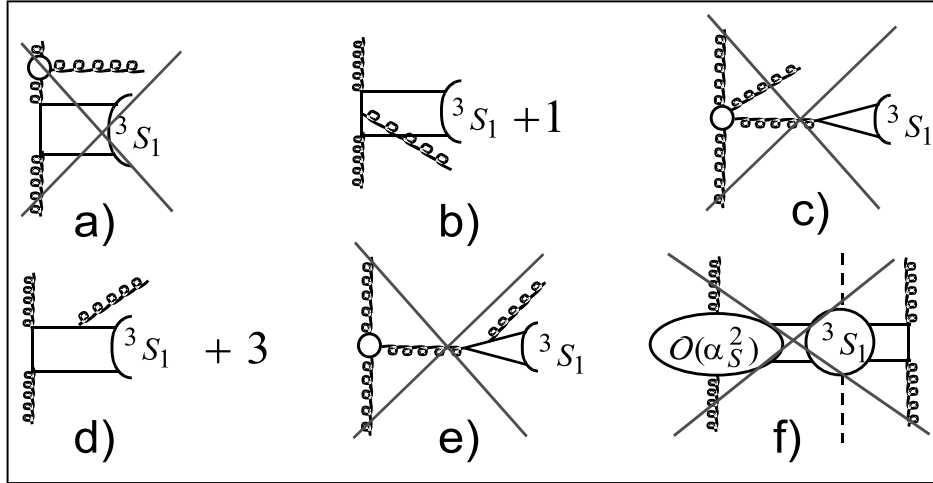


Abb. 7-9 Welche Graphen tragen zur J/Ψ -Produktion bei ?

und e) enthalten unbekannte, effektive 3-Gluonen-Vertices. Da die Kopplung an den 3S_1 -Zustand dabei aber über Unterdiagramme wie im linken Teil der Abbildung 7-2 stattfindet, können die Diagramme a) und e) wegen der negativen C -Parität des produzierten Quarkoniums nicht zur Amplitude beitragen. Auch der effektive vier-Gluon-Vertex in c) muss wegen der Produktion eines Farbsingletts nicht berücksichtigt werden. Der Graph f), der potentiell Schleifenbeiträge in die Rechnung einbringen würde, kann zur Ordnung α_s^2 ebenfalls keinen Beitrag liefern, da die rechte Seite dieses Diagramms erneut wegen der C -Parität verschwindet. Letztendlich bleiben also nur die Graphen b) und d) aus Abbildung 7-9 übrig. Diese Diagramme enthalten aber keine effektiven Anteile, wie zum Beispiel in Abbildung 4-5, und ergeben mit Hilfe der normalen Feynmanregeln somit die vollständige Farbsinglett- 3S_1 -Produktionsamplitude in der Ordnung α_s^3 . Die Eichinvarianz in Bezug auf die t -Kanal Gluonen der so konstruierten NLO Amplitude kann, wie gehabt, durch Bildung der Grenzwerte $q_{1/2\perp} \rightarrow 0$ entsprechend der Gleichung (4.23) nachgeprüft werden. Das zusätzliche emittierte Gluon ist reell und bringt somit keine Schwierigkeiten in Bezug auf die Eichinvarianz mit sich.

Anstatt die Gesamtamplitude der J/Ψ -Produktion in Form einer Gleichung aufzuschreiben, ist es an dieser Stelle sinnvoller, sämtliche Feynmangraphen mit Impulsen und Farbindices anzugeben, die ausgewertet werden müssen. Anschließend lässt sich dann angeben, wie die Farbstruktur und die Quadrierung der Amplitude systematisch behandelt werden können.

Wir bezeichnen die Diagramme in Abbildung 7-10 von links oben nach rechts unten mit A_1 bis A_6 . Die verschiedenen Kombination der Farbmatrizen $T^c T^{c_1} T^{c_2}$ etc., die dabei auftreten, werden durch die Projektion aus Gleichung (7.7) zu Spuren $Tr \{T^c T^{c_1} T^{c_2}\}$, die wiederum mit Hilfe der Gleichung

$$Tr \{T^c T^{c_1} T^{c_2}\} = \frac{1}{4} \{d^{cc_1 c_2} + i f^{cc_1 c_2}\} \quad (7.20)$$

weiter verarbeitet werden können. Die quadrierte Amplitude enthält dann Produkte der unterschiedlichen Farbstrukturen der Amplituden A_i . Die Sum-

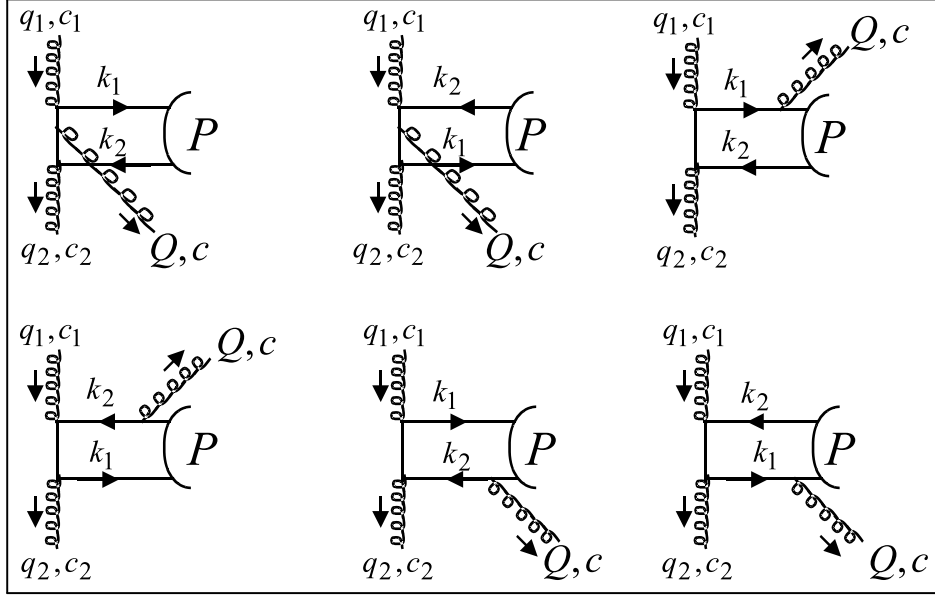


Abb. 7-10 Diagramme der J/Ψ -Produktion

manden des Amplitudenquadrats sind wegen der Farbsinglettprojektion im t -Kanal gemäß Gleichung (3.11) und der Symmetrie der Farbkonstanten $d^{cc_1c_2}$ sowie der Antisymmetrie der Farbkonstanten $f^{cc_1c_2}$ in den Indices c, c_1 und c_2 proportional zu

$$d^2 \equiv d^{cc_1c_2} d^{cc_1c_2} = \frac{(N_c^2 - 4)}{N_c} (N_c^2 - 1)$$

beziehungsweise

$$\pm f^2 \equiv \pm f^{cc_1c_2} f^{cc_1c_2} = \pm N_c (N_c^2 - 1), \quad (7.21)$$

wobei das Vorzeichen in Gleichung (7.21) von der Stellung der Farbindices abhängt. Es bietet sich schließlich an, die zahlreichen Beiträge $A_i^\dagger A_j$ zum Amplitudenquadrat nach Anteilen zu sortieren, die proportional zu $d^2 + f^2$ oder $d^2 - f^2$ sind und diese Anteile jeweils getrennt, zum Beispiel mit einem Computeralgebra-Programm, zu berechnen. Anschließend können die verschiedenen Beiträge mit den richtigen Vorfaktoren aufsummiert werden. Dabei zeigt sich, dass die Teile $\propto d^2 + f^2$ und $\propto d^2 - f^2$ identisch sind und somit in der Summe nur Beiträge proportional zu d^2 überleben, was natürlich auch durch Symmetrieüberlegungen herausgearbeitet werden kann.

In Bezug auf die Diracstruktur können, wie bei der χ_c -Produktion, sämtliche auftretenden Polarisationsensoren mit Hilfe der Identitäten (7.15) und (7.16) geschlossen behandelt werden.

Wie im Fall der Quark-Antiquark-Produktion werden in Abbildung 7-9 zwei Teilchen produziert, das J/Ψ mit dem Impuls P und das Gluon mit dem Impuls Q , und der Wirkungsquerschnitt wird wieder mit einem vier-Teilchen-Phasenraum, entsprechend Gleichung (3.18), berechnet. Da das produzierte reelle Gluon experimentell nicht detektiert wird, integriert man es in der Regel gleich aus.

7.4.2 Vergleich mit experimentellen Daten zur direkten J/Ψ -Produktion

Der auf dem eben beschriebenen Weg berechnete Beitrag zur J/Ψ -Produktion in hochenergetischen Hadron-Hadron-Kollisionen wird auch als direkter Beitrag bezeichnet. Das ist sinnvoll, weil schon früh sowohl experimentell als auch theoretisch klar wurde, dass es zahlreiche indirekte J/Ψ -Quellen gibt, die im Experiment zum Teil nicht leicht voneinander zu unterscheiden sind. Mit dem χ_c -Teilchen haben wir in einem der vorhergehenden Abschnitte schon ein Beispiel für eine indirekte J/Ψ -Quelle kennengelernt, und weitere sind unter anderem durch die Produktion und darauf folgenden Zerfälle von B -Mesonen gegeben.

Für die numerische Auswertung des Farbsinglett-Wirkungsquerschnittes fehlt nur noch die Wellenfunktion der $c\bar{c}$ - S -Welle am Ursprung, $\mathcal{R}(0)$. Dafür greifen wir erneut auf die Rechnungen von Buchmüller und Tye [BT81] beziehungsweise die Arbeit von Eichten und Quigg [EQ95] zurück und wählen bei einer Masse von $m_c = 1.48$ GeV einen Wert von $|\mathcal{R}(0)|^2 = 0.81$ GeV³.

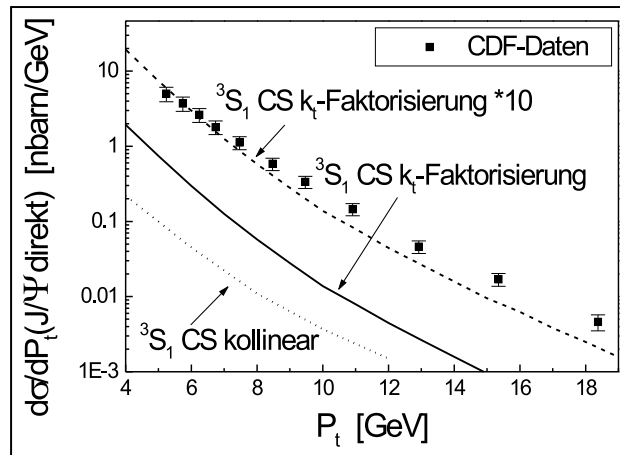


Abb. 7-11 Direkte J/Ψ -Produktion

Das Ergebnis für den P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitt der Farbsinglett ("color singlet" = CS) - J/Ψ -Produktion ist in Abbildung 7-11 zu sehen [HKS⁺01a]. Obwohl der Wirkungsquerschnitt in der k_\perp -Faktorisierung bei relativ kleinem Transversalimpuls etwa einen Faktor 10 größer ist als in der kollinearen Faktorisierung, liegen unsere Ergebnisse trotz allem immer noch etwa eine Größenordnung unterhalb der experimentell gemessenen Werte. Neben der massiven Unterschätzung der absoluten Werte ist auch die qualitative Übereinstimmung nicht so überzeugend wie bei der Bottom-Antibottom oder der χ_c -Produktion, denn die Steigung der theoretischen Kurve ist im Vergleich zu den Daten etwas zu steil. Die k_\perp -Faktorisierung ist offenbar nicht in der Lage, ohne weiteres Zutun das Rätsel um die J/Ψ -Produktion zu lösen.

7.5 Farboktett-Produktion und nichtrelativistische QCD

Um zu verstehen, in welcher Hinsicht der bisher verwendete sogenannte Farbsinglett-Mechanismus bei der Bindung der schweren Quarks zum Quarkonium falsch ist beziehungsweise erweitert werden muss, versuchen wir, noch einmal einen rein qualitativen Blick auf die nichtperturbative Physik hinter diesem Bindungsmechanismus zu werfen. Zunächst erlaubt die relative Größe der Charm- beziehungsweise Bottommasse, wie bereits diskutiert wurde, eine nichtrelativistische Behandlung des Quark-Antiquark-Systems. Die daraufhin zum Einsatz kommende nichtrelativistische Quantenmechanik ist unter Zuhilfenahme eines geeigneten Quark-Antiquark-Potentials in der Lage, gewisse Aussagen über den gebundenen Zustand zu treffen. Tatsächlich stellt dieses Confinementpotential natürlich nur eine grobe Näherung an eine vermutlich sehr komplizierte Quark-Gluon-Wechselwirkung dar. Diese Wechselwirkung, die nicht durch die Störungstheorie beschrieben werden kann, basiert im wesentlichen auf dem Austausch sogenannter weicher Gluonen zwischen Quark und Antiquark. Harte Gluonen mit hohen Impulsen beziehungsweise großer Virtualität sind dabei sicherlich unterdrückt, denn sie würden das gebundene System eher wieder zerstören als binden. Das Vorhandensein niederenergetischer, weicher Gluonen bedeutet aber prinzipiell, dass ein oder mehrere dieser Gluonen vom gebundenen Zustand abgestrahlt oder auch absorbiert werden können, wie in Abbildung 7-12 angedeutet.

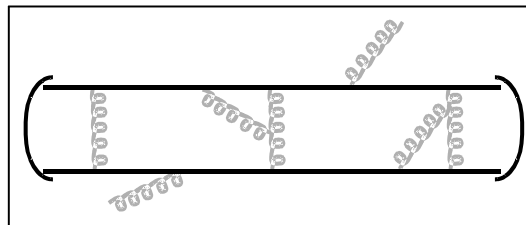


Abb. 7-12 Gebundener Zustand, der weiche Gluonen absorbiert und abstrahlt

Entsprechend diesem Bild ist es nun möglich, dass ein gebundener Farboktett-Zustand durch Aufnahme oder Abstrahlung weicher Gluonen in einen asymptotischen Farbsinglett-Zustand übergeht. Diese Möglichkeit der Hadronisierung öffnet natürlich einen ganz neuen Produktionsmechanismus, den sogenannten Farboktett- oder Coloroctet-Mechanismus (COM) [CL96a, CL96b, BFY96]. Dabei wird am perturbativen Vertex zum Beispiel ein Farboktett-Quark-Antiquark-Paar erzeugt, welches sich in gebundener Form vom primären Kollisionspunkt wegbewegt und schließlich durch nichtperturbative Gluonen seine Farbladung verliert und als Farbsinglett im Detektor landet. Selbstverständlich ändern sich neben den Farbquantenzahlen durch Abstrahlen der weichen Gluonen auch die Drehimpulsquantenzahlen des Quarkoniums, was in den weiteren Überlegungen berücksichtigt werden muss.

7.6 Faktorisierung, COM und COME

Die eben qualitativ herausgearbeiteten Vorstellungen in Bezug auf die Produktion von Quarkonia werden durch die sogenannte nichtrelativistische QCD (NRQCD) auf eine solide Basis gestellt [BBL95]. Die NRQCD gründet wesentlich auf der Annahme sehr kleiner Quarkgeschwindigkeiten $v \ll 1$ und großer Quarkmassen m . Die wesentliche Näherung lautet dabei

$$m \gg mv \gg mv^2, \quad (7.22)$$

das heißt, die Quarkmassen sind wesentlich größer als die typischen Quarkimpulse, und die sind wiederum größer als die relevanten Quarkenergien. Aus der fundamentalen QCD-Lagrangedichte kann im Rahmen der Approximation aus Gleichung (7.22) eine effektive nichtrelativistische QCD-Lagrangedichte hergeleitet werden. Dabei dient die typische Quarkgeschwindigkeit v als neuer Störungsparameter. Neben dem Gluonfeld spielen in der NRQCD der Vernichtungsoperator eines schweren Quarks ψ und der Erzeugungsoperator eines schweren Antiquarks χ eine wesentliche Rolle.

Wir nehmen nun an, dass im Rahmen der NRQCD der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Quarkonia faktorisiert. Um die Struktur der Faktorisierung verstehen zu können, ist es sinnvoll, einen Operator

$$\mathcal{O}_n \equiv \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi$$

zu definieren. Dabei ist \mathcal{K}_n ein Faktor, bestehend aus einer Farbmatrix, δ oder T^a , einer Spinmatrix, δ oder der Paulimatrix σ , und kovarianten Ableitungen D . Der Operator \mathcal{O}_n erzeugt demnach gemäß \mathcal{K}_n ein schweres Quark-Antiquark-Paar in einem wohldefinierten Farb- und Drehimpulszustand. Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Quarkoniums Ψ in einer Hadron-Hadron-Kollision hat dann die folgende faktorisierte Gestalt [BBL95]

$$\sigma \propto \mathcal{F} \times A^\dagger A \times \mathcal{F} \times \sum_{X,n} \langle 0 | \mathcal{O}_n^\dagger | \Psi + X \rangle \langle \Psi + X | \mathcal{O}_n | 0 \rangle. \quad (7.23)$$

Für die Gültigkeit der Faktorisierung ist es dabei entscheidend, dass der Wirkungsquerschnitt beziehungsweise der Prozess in Bezug auf die Produktion des gebundenen Zustandes Ψ inklusiv ist, also wirklich über alle möglichen Ausgangszustände X in Gleichung 7.23 summiert wird. Der Zustand X steht dabei natürlich auch für die oben erwähnten weichen Gluonen, so dass in diesem Fall tatsächlich zunächst über den Operator \mathcal{O}_n Farboktett-Zustände erzeugt werden können, die dann auf nichtperturbativem Weg in das Farbsinglett-Quarkonium Ψ und die unbeobachteten Teilchen X übergehen.

Durch Definition eines Quarkonium-Produktionsoperators \mathcal{O}_n^Ψ

$$\mathcal{O}_n^\Psi \equiv \sum_X \mathcal{O}_n^\dagger | \Psi + X \rangle \langle \Psi + X | \mathcal{O}_n$$

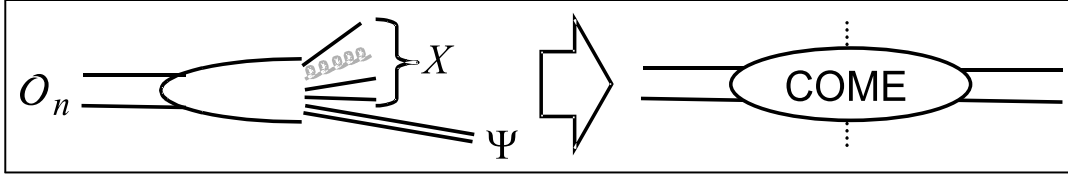


Abb. 7-13 Faktorisierung in der NRQCD

kann die rechte Seite von Gleichung (7.23) noch etwas umgeschrieben werden

$$\sigma \propto \mathcal{F} \times A^\dagger A \times \mathcal{F} \times \sum_n \langle 0 | \mathcal{O}_n^\Psi | 0 \rangle. \quad (7.24)$$

Die in Gleichung (7.24) auftretenden Vakuumerwartungswerte

$$\langle 0 | \mathcal{O}_n^\Psi | 0 \rangle \quad (7.25)$$

werden Farboktett(-singlett)-Matrixelemente ("color-octet-matrix-elements" = COME) genannt [CL96a, CL96b]. Sie geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein durch den Index n spezifizierter Farbsinglett(-oktett)-Quark-Antiquark-Zustand in das Quarkonium Ψ hadronisiert. Die Abbildung 7-13 fasst die Faktorisierung in der NRQCD noch einmal zusammen.

Die Nützlichkeit der Faktorisierungsgleichung (7.24) liegt natürlich erneut in der Universalität der COME und damit der Tatsache, dass sie nicht vom primären Prozess abhängen. Da die COME, wie auch die unintegrierten Verteilungsfunktionen, rein nichtperturbative Physik beschreiben, ist es leider nicht möglich, ihre Werte für gegebenes n und Ψ analytisch zu berechnen. Im Gegensatz zu Zerfallskonstanten scheint es bislang auch noch nicht klar zu sein, wie die COME zum Beispiel im Rahmen der Gitter-QCD numerisch bestimmt werden können. Sie sind daher als mehr oder weniger freie Parameter aufzufassen und letztendlich an die experimentellen Daten anzupassen. Mit einem erneuten Blick auf Gleichung (7.24) könnten einem allerdings zunächst Zweifel am Sinn unserer Überlegungen kommen, denn die Summe über n ist a priori infinit und läuft über alle denkbaren Spin- und Farbkonfigurationen des Quark-Antiquark-Paares. Damit enthält die Faktorisierungsformel also unendlich viele, mehr oder wenig freie Parameter in Form der COME, und die Vorhersagekraft wäre dadurch praktisch verloren! Wie wir gleich sehen werden, lässt sich zum Glück eine gewisse Hierarchie in Bezug auf die COME angeben, so dass effektiv nur eine bestimmte Anzahl von freien Parametern in die Rechnungen eingebracht werden.

7.6.1 Führende elektrische und magnetische Übergänge

Die Abstrahlung von weichen Gluonen, so wie in Abbildung 7-12 oder 7-13 angedeutet, kann im Rahmen der NRQCD auf zwei Arten stattfinden [Bra96].

Die NRQCD-Lagrangedichte enthält einen Term

$$\mathcal{E} = ig\psi^\dagger \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi,$$

der sogenannte elektrische Übergänge, und einen Term

$$\mathcal{B} = g\psi^\dagger \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot \sigma \psi,$$

der magnetische Übergänge beschreibt. Nun lässt sich in der nichtrelativistischen Approximation zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Übergang $\propto \mathcal{E}^2$ wie v^2 mit der Geschwindigkeit v des Quarks skaliert, wenn man annimmt, dass die weichen Gluonen eine Energie $E \lesssim mv^2$ besitzen. Die Wahrscheinlichkeit für einen magnetischen Übergang $\propto \mathcal{B}^2$ ist hingegen von der Ordnung $\mathcal{O}(v^4)$. Ist die typische Energie der weichen Gluonen allerdings eher durch $E \lesssim mv$ gegeben, skaliert die Wahrscheinlichkeit für den elektrischen und den magnetischen Übergang wie v^3 . Folglich spielt die Geschwindigkeit an dieser Stelle als Störparameter eine ganz entscheidende Rolle. Werden im Zuge der Hadronisierung des Quark-Antiquark-Paares $n_g = n_{\mathcal{E}} + n_{\mathcal{B}}$ sehr weiche Gluonen mit $E \lesssim mv^2$ über elektrische oder magnetische Übergänge abgestrahlt, ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess um einen Faktor $v^{2n_{\mathcal{E}}+4n_{\mathcal{B}}}$ unterdrückt. Ist die Geschwindigkeit v klein genug, können wir uns in einem ersten Schritt zum Beispiel auf die Abstrahlung von einem oder maximal zwei weichen Gluonen beschränken und dadurch, wie gleich klar wird, die Anzahl der auftretenden COME drastisch reduzieren. Liegt das Quark-Antiquark-Paar vor der Hadronisierung in einem $^{2S+1}L_J$ -Zustand vor, kann sich durch einen elektrischen Dipol-Übergang die Bahndrehimpulsquantenzahlen L nur um eine Einheit $\Delta L_{\mathcal{E}} = \pm 1$ ändern, während die Spinquantenzahl erhalten bleibt, $\Delta S_{\mathcal{E}} = 0$. Im Falle eines magnetischen Übergangs lauten die Auswahlregeln hingegen $\Delta L_{\mathcal{B}} = 0$ und $\Delta S_{\mathcal{B}} = \pm 1$. Zu einem gegebenen physikalischen Farbsinglett-Endzustand Ψ gibt es also in den führenden Ordnungen in der Quarkgeschwindigkeit v eine durch die Auswahlregeln begrenzte Anzahl von möglichen beitragenden Singlett- oder Oktett-Anfangszuständen. Die Summe über n in Gleichung (7.24) lässt sich also auf einige wenige Drehimpuls- und Farbkonfigurationen beschränken.

7.6.2 Farbsinglett und -oktett-Beiträge zur S- und P-Wellen-Produktion

Eine zusätzliche Unterdrückung durch die Quarkgeschwindigkeit ist schon in der perturbativen Produktion des Singlett- oder Oktett-Quark-Antiquark-Zustands gegeben. Dabei zeigt sich, dass S-Wellen mit einer Wahrscheinlichkeit der Ordnung $\mathcal{O}(v^3)$ produziert werden, während P-Wellen mit v^5 skalieren. Im Falle der Produktion von P-Wellen, zum Beispiel dem $c\bar{c}^{-3}P_J$ - beziehungsweise χ_{cJ} -Zustand, ist der Beitrag niedrigster Ordnung in der Quarkgeschwindigkeit

natürlich dann gegeben, wenn keine Abstrahlung weicher Gluonen stattfindet. Dieser Farbsinglett-Beitrag entspricht exakt der von uns bereits berechneten Farbsinglett- χ_{cJ} -Produktion. Im Rahmen der NRQCD ist der Wirkungsquerschnitt allerdings nicht proportional zur Ableitung der Wellenfunktion am Ursprung, sondern zum Farbsinglettmatrixelement

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}(^3P_J^1) | 0 \rangle. \quad (7.26)$$

Die unterstrichene $\underline{1}$ zeigt an dieser Stelle den Farbsinglettcharakter des perturbativ erzeugten 3P_J -Quark-Antiquark-Zustandes an. Selbstverständlich besteht, wie wir später noch sehen werden, ein Zusammenhang zwischen Wellenfunktionen am Ursprung im Farbsinglett-Modell und den zugehörigen NRQCD-Matrixelementen aus Gleichung (7.25) beziehungsweise (7.26). Das Matrixelement in Gleichung (7.26) ist entsprechend der obigen Diskussion von der Ordnung $\mathcal{O}(v^5)$. Wird nun, wie man annehmen sollte, in nächstführender Ordnung ein weiches Gluon über einen elektrischen Übergang abgestrahlt, kann der finale χ_{cJ} -Zustand gemäß der Auswahlregeln durch eine primäre Farboktett- S - oder D -Welle erzeugt werden. Der S -Wellen-Beitrag, genauer das COME

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}(^3S_1^8) | 0 \rangle, \quad (7.27)$$

skaliert dabei wie v^{3+2} , ist also im Rahmen der NRQCD von der gleichen Ordnung wie der Farbsinglett-Beitrag in Gleichung (7.26)! Die Bedeutung dieses Sachverhalts liegt etwas tiefer und stellt ein starkes Argument für die NRQCD beziehungsweise die Farboktettbeiträge dar. Schon früh wurde nämlich festgestellt, dass bei der Berechnung der P -Wellen-Produktion neben einer linearen Infrarot-Divergenz auch eine logarithmische Divergenz auftaucht [BBL95]. Während lineare Divergenzen unzweideutig der nichtperturbativen Physik, zum Beispiel den Wellenfunktionen, zugeordnet werden können, ist das mit den logarithmischen in diesem Fall nicht möglich. Die Rettung liegt in dem Farboktettbeitrag aus Gleichung (7.27), der die logarithmische P -Wellen-Divergenz exakt weghebt, was natürlich nur möglich ist, wenn beide Anteile von der gleichen Ordnung in v sind.

Im Gegensatz zu dem $^3S_1^8$ -Beitrag ist die D -Welle massiv unterdrückt und kann vernachlässigt werden. Wie man sich leicht überlegt, sind die magnetischen Übergänge von weichen Gluonen im Falle der χ_{cJ} -Produktion ebenfalls wesentlich stärker als mit v^5 unterdrückt und werden von uns im weiteren nicht berücksichtigt.

Bei der J/Ψ - beziehungsweise 3S_1 -Wellen-Produktion ist der Beitrag niedrigster Ordnung proportional zum Farbsinglett-Matrixelement

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3S_1^1) | 0 \rangle \quad (7.28)$$

der Ordnung $\mathcal{O}(v^3)$. Berücksichtigt man nun die elektrische Abstrahlung eines sehr weichen Gluons, kommt als Ausgangszustand nur die Farboktett- P -Welle $^3P_J^8$ in Frage. Das zugehörige COME

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3P_1^8) | 0 \rangle \quad (7.29)$$

ist von der Ordnung $\mathcal{O}(v^{5+2})$, also formal gegenüber dem Farbsinglett-Beitrag schon um einen Faktor v^4 unterdrückt. Im Falle eines magnetischen Übergangs ist der einzig mögliche Ausgangszustand durch $^1S_0^g$ gegeben. Für sehr weiche Gluonen skaliert das zugehörige Matrixelement

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^1S_0^g) | 0 \rangle \quad (7.30)$$

wie v^{3+4} und ist damit von der gleichen Ordnung wie das COME in Gleichung (7.29). Wie man sich leicht überlegt, kann das J/Ψ aber auch durch zwei hintereinandergeschaltete elektrische Übergänge aus einem Singlett- oder Oktett- 3S_1 -Zustand hervorgehen. Dabei sind die entsprechenden Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{O}'^{J/\Psi}(^3S_1^1) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3S_1^g) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.31)$$

erneut von der Ordnung $\mathcal{O}(v^{3+2+2})$, so dass alle COME aus den Gleichungen (7.29), (7.30) und (7.31) zur selben Ordnung in der Quarkgeschwindigkeit beitragen. Sämtliche weiteren möglichen Kombinationen von Übergängen sind gegenüber den eben aufgeführten COME unterdrückt und werden von uns im weiteren nicht betrachtet.

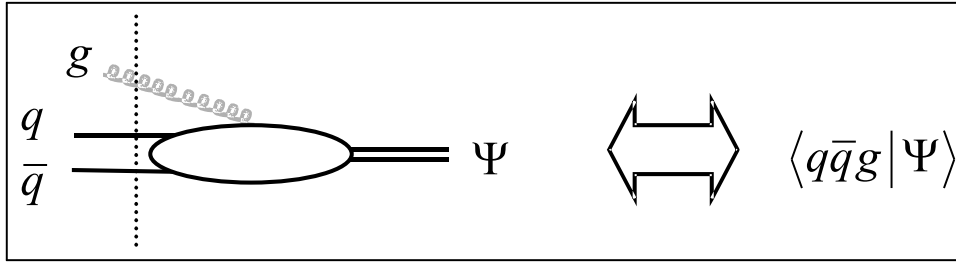


Abb. 7-14 Zusammenhang zu höheren Fockraum-Komponenten

Zu einer etwas anderen Betrachtungsweise gelangt man am einfachsten, wenn zum Beispiel das weiche auslaufende Gluon in den Eingangskanal umgeklappt wird. Der dadurch entstehende Absorptionsprozess ist in Abbildung 7-14 angedeutet. Dabei wird sofort deutlich, dass das Diagramm als Projektion des physikalischen Farbsinglett-Quarkoniums Ψ auf einen Quark-Antiquark-Gluon-Zustand interpretiert werden kann. Im Rahmen der Teilchenzahl- oder Fockraumdarstellung projiziert man auf diesem Wege höhere Fockraumkomponenten aus dem gebundenen Zustand $|\Psi\rangle$ heraus, der rein schematisch als

$$|\Psi\rangle = |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + \dots \quad (7.32)$$

geschrieben werden kann. Durch die gerade von uns durchgeführte Analyse der verschiedenen Farboktett-Beiträge zur Quarkoniumproduktion und ihrer Skalierung in der Quarkgeschwindigkeit v ist es nun ganz leicht, für den J/Ψ - beziehungsweise χ_c -Zustand eine Fockraumentwicklung in v anzugeben. Für die 3P_J -Welle finden wir in Analogie zu den Gleichungen (7.26) und (7.27) [CL96a]

$$|\chi_{cJ}\rangle = \left| q\bar{q} \left[^3P_J^1 \right] \right\rangle + \mathcal{O}(v^0) \left| q\bar{q} \left[^3S_1^g \right] g \right\rangle + \dots, \quad (7.33)$$

wobei hier die Ordnung $\mathcal{O}(v^0)$ für den Unterschied zwischen der Ordnung des Quark-Antiquark-Grundzustands und den höheren Fockraumkomponenten steht und $\left| q\bar{q} \left[{}^{2S+1}L_J^{\frac{1}{2},8} \right] \right\rangle$ bedeutet, dass sich das Quark-Antiquark-Paar in einem ${}^{2S+1}L_J^{\frac{1}{2},8}$ -Zustand befindet. Im Falle des J/Ψ ergibt sich im Zusammenhang mit den Gleichungen (7.28), (7.29), (7.30) und (7.31) für die Fockraumzerlegung [CL96a]

$$\begin{aligned} |J/\Psi\rangle &= \left| q\bar{q} \left[{}^3S_1^1 \right] \right\rangle + \\ &\quad \mathcal{O}(v^{4/2}) \left\{ \left| q\bar{q} \left[{}^3P_1^8 \right] g \right\rangle + \left| q\bar{q} \left[{}^1S_0^8 \right] g \right\rangle + \left| q\bar{q} \left[{}^3S_1^{\frac{1}{2},8} \right] gg \right\rangle \right\} + \dots \end{aligned} \quad (7.34)$$

Entsprechend unserer vorherigen Überlegungen und der Auswahlregeln für die elektrischen und magnetischen Übergänge sehen wir, dass die $\left| q\bar{q} \left[{}^{2S+1}L_J^{\frac{1}{2},8} \right] g \right\rangle$ -Beiträge aus den Gleichungen (7.33) und (7.34) tatsächlich Farbsinglett-Zustände mit der richtigen Grundzustand-Drehimpulsstruktur darstellen.

Matrizelement	$\mathcal{O}(\alpha_S)$ kollineare/ k_\perp -Faktorisierung	$\mathcal{O}(v)$ NRQCD
$\langle 0 \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^3S_1^1) 0 \rangle$	α_S^3 / α_S^3	v^3
$\langle 0 \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^3P_J^8) 0 \rangle$	$\alpha_S^3 \cdot \tilde{\alpha}_S / \alpha_S^2 \cdot \tilde{\alpha}_S$	v^7
$\langle 0 \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^1S_0^8) 0 \rangle$	$\alpha_S^3 \cdot \tilde{\alpha}_S / \alpha_S^2 \cdot \tilde{\alpha}_S$	v^7
$\langle 0 \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^3S_1^{\frac{1}{2}}) 0 \rangle$	$\alpha_S^3 \cdot \tilde{\alpha}_S^2 / \alpha_S^2 \cdot \tilde{\alpha}_S^2$	v^7
$\langle 0 \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}({}^3P_J^1) 0 \rangle$	α_S^3 / α_S^2	v^5
$\langle 0 \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}({}^3S_1^{\frac{1}{2}}) 0 \rangle$	$\alpha_S^3 \cdot \tilde{\alpha}_S / \alpha_S^2 \cdot \tilde{\alpha}_S$	v^5

(7.35)

In der obigen Tabelle (7.35) findet sich eine Übersicht der für uns relevanten COME und ihre Einordnung in die Störungstheorie in Bezug auf die starke Kopplungskonstante und die Quarkgeschwindigkeit. Die kollineare Faktorisierung setzt bei der Berechnung und Vorhersage von P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitten sowohl für Farbsinglett- als auch Farboktettbeiträge prinzipiell erst ab der Ordnung α_S^3 ein. Mit der Ausnahme des ${}^3S_1^1$ -Beitrags zum J/Ψ liefert die k_\perp -Faktorisierung wegen der endlichen Gluontransversalimpulse hingegen schon ab der Ordnung α_S^2 eine Vorhersage. Bezieht man die Kopplung $\tilde{\alpha}_S$ des weichen Gluons mit in die Überlegung ein und setzt $\tilde{\alpha}_S = \alpha_S$, so tragen fast alle Matrizelemente in der k_\perp -Faktorisierung bereits in der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S^3)$ zu den Wirkungsquerschnitten bei. Insbesondere sind im Zusammenhang mit der J/Ψ -Produktion die ${}^3P_J^8$ - und ${}^1S_0^8$ -Beiträge formal von der gleichen Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S^3)$ wie der Farbsinglett-Beitrag ${}^3S_1^1$. Dieser Ansatz könnte eine mögliche Erklärung für die falsche Vorhersage des direkten J/Ψ -Wirkungsquerschnittes in Abbildung 7-11 sein, da dort nur der Farbsinglett-Beitrag berücksichtigt wurde, während wir gerade gesehen haben, dass bestimmte Singlett- und Oktettanteile im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung formal von der gleichen Ordnung in der starken Kopplungskonstanten sind. In der kollinearen Faktorisierung sind dem gegenüber alle Farboktett-Beiträge mit $\tilde{\alpha}_S$ gegenüber den Singlett-Anteilen unterdrückt, so dass wir unter diesen Umständen deutliche Unterschiede zwischen den COM-Vorhersagen von k_\perp - und kollinearer Faktorisierung erwarten können.

7.6.3 COME im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung

Um die Farboktett-Beiträge in unsere numerischen Rechnungen korrekt einbauen zu können, zitieren wir an dieser Stelle den bereits erwähnten Zusammenhang zwischen den Wellenfunktionen am Ursprung $\mathcal{R}(0)$ beziehungsweise $\mathcal{R}'(0)$ und den Farbsinglett-Matrixelementen aus Gleichung (7.26) und (7.28) [CL96a, CL96b]

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}(^3P_J^1) | 0 \rangle &= \frac{3N_c}{2\pi} (2J+1) |\mathcal{R}'(0)|^2, \\ \langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3S_1^1) | 0 \rangle &= \frac{N_c}{2\pi} |\mathcal{R}(0)|^2.\end{aligned}\quad (7.36)$$

Die Beziehungen (7.36) ermöglichen den Übergang von den 3S_1 - und 3P_J -Wellenfunktionen zu den entsprechenden Matrixelementen. Für den $^1S_0^8$ -Beitrag zum J/Ψ verwendet man den Zusammenhang

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{\eta_c}(^1S_0^1) | 0 \rangle = \frac{N_c}{2\pi} |\mathcal{R}(0)|^2, \quad (7.37)$$

wobei η_c der Name des entsprechenden $c\bar{c}$ -Quarkoniums ist und die Wellenfunktionen am Ursprung $\mathcal{R}(0)$ in den Gleichungen (7.36) und (7.37) nicht miteinander verwechselt werden dürfen. Um Farboktett-Übergänge berechnen zu können, müssen anschließend die Singlett-Matrixelemente durch die zugehörigen COME ersetzt werden, also

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}(^3P_J^1) | 0 \rangle &\rightarrow \langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3P_J^8) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3S_1^1) | 0 \rangle &\rightarrow \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_{c,J/\Psi}}(^3S_1^8) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | \mathcal{O}^{\eta_c}(^1S_0^1) | 0 \rangle &\rightarrow \langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^1S_0^8) | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (7.38)$$

Dieser Umweg über die Singlett-Matrixelemente und die Ersetzung in den Gleichungen (7.38) dient hier nur dem Zweck, unsere ursprünglichen, auf den Wellenfunktionen basierenden Rechnungen, auf einem möglichst einfachen Weg an den Farboktettmechanismus anzupassen.

Als letzter und wesentlicher Schritt wird das Quark-Antiquark-Paar jetzt natürlich nicht auf einen Singlettzustand wie in Gleichung (7.7), sondern auf einen Farboktett-Zustand projiziert. Der entsprechende normierte Projektionsoperator ist durch

$$\sqrt{2}T_{ji}^c$$

gegeben, und die Farboktett-Amplitude folgt dann aus der Ersetzung

$$\psi_{ij}^{c_2c_1} \rightarrow \sqrt{2}Tr\{\psi^{c_2c_1}T^c\}. \quad (7.39)$$

Für den Wirkungsquerschnitt wird schließlich über alle Farben des Farboktett-Quark-Antiquark-Paares, also den Farbindex c , summiert. Die Spuren in Gleichung (7.39) über Produkte von drei Farbmatrizen können mit der Identität (7.20) weiter bearbeitet werden.

Aufgrund der C -Parität tragen erneut nicht alle Feynman-Diagramme zur der Berechnung der Farboktett-Anteile bei. Die relevanten LO-Graphen sind in

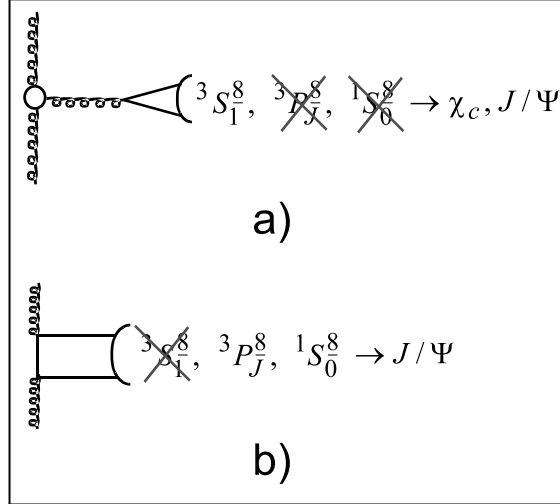


Abb. 7-15 Farboktett-Beiträge

Abbildung 7-15 zu sehen. Hochinteressant ist dabei, dass in führender Ordnung in der Quarkgeschwindigkeit nur der effektive 3-Gluonen-Vertex, wie in Abbildung 7-15 a) gekennzeichnet, einen Farboktett-Beitrag zum χ_c -Quarkonium liefert. Im Gegensatz dazu stehen dem J/Ψ zusätzlich noch die beiden Kanäle in Teilabbildung b), bei denen der effektive Vertex nicht zum Einsatz kommt, zur Verfügung.

7.6.4 Numerische Auswertung und Anpassung der COME

Die numerische Berechnung basiert im Fall der Farboktett-Anteile auf den selben Gleichungen wie bei der χ_c -Farbsinglett-Produktion, abgesehen von den Ersetzungen, die im vorhergehenden Abschnitt diskutiert wurden. Wie bereits mehrfach erwähnt, können die COME zur Zeit weder analytisch noch anderweitig numerisch bestimmt werden und müssen daher an die vorliegenden Daten angepasst beziehungsweise gefittet werden. Aus diesem Grund geht es bei den folgenden numerischen Resultaten nicht um eine Vorhersage, sondern eine Bestimmung der COME (7.27), (7.29), (7.30) und (7.31) im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung. Da die COME allerdings universell sind, können die auf diesem Weg bestimmten Matrixelemente zur Vorhersage von Wirkungsquerschnitten bei anderen Energien, Prozessen etc. verwendet werden.

Auf der linken Seite der Abbildung 7-16 ist der Fit des $^3S_1^8$ -Beitrags zur χ_c -Produktion unter Verwendung der k_\perp -Faktorisierung zu sehen [HKS⁺01b]. Da der Farbsinglett-Anteil die Daten im Gegensatz zur kollinearen Faktorisierung bereits recht gut beschreibt, ist der Farboktett-Anteil entsprechend klein. Der beste Fit liefert bei einem χ^2 über der Anzahl der Freiheitsgrade (= number of degrees of freedom = NDOF) von $\chi^2/\text{NDOF} = 1.3$ für das COME einen Wert von

$$\langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3S_1^8) | 0 \rangle = 9.0 (\pm 2.0) 10^{-4} \text{ GeV}^3. \quad (7.40)$$

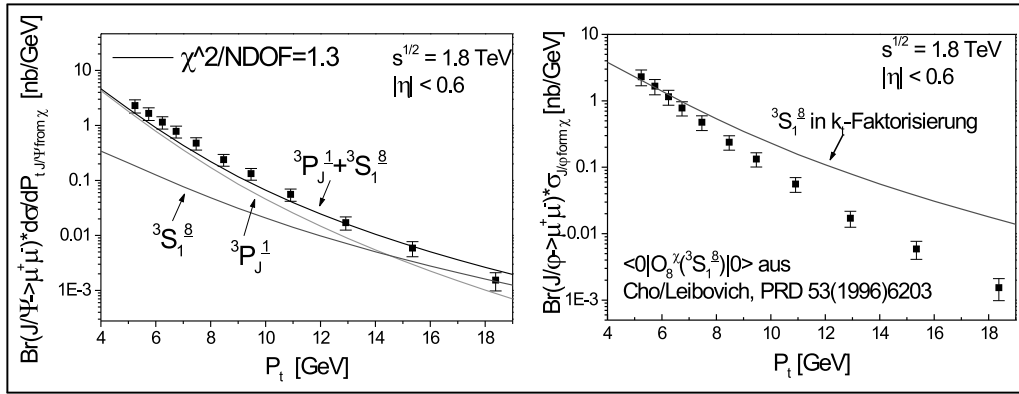


Abb. 7-16 Farboktett-Beiträge zur P -Wellen-Produktion

Wie bereits im Kapitel über die χ_c -Farbsinglett-Produktion diskutiert wurde, kann es durchaus sein, dass der Farbsinglett-Beitrag in unserer Rechnung aufgrund der Vernachlässigung der Zerfallsdynamik des radiativen Zerfalls

$$\chi_c \rightarrow J/\Psi + \gamma$$

unterschätzt wird. Aus diesem Grund ist der Wert in Gleichung (7.40) mit einer gewissen Vorsicht zu genießen und kann durchaus noch kleiner ausfallen. Man sollte ihn als obere Grenze des COME im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung ansehen.

Natürlich wurden die COME auch unter Verwendung der kollinearen Faktorisierung an die Daten angepasst. Es ist sogar so, dass die NQRQCD ihre Popularität im wesentlichen dem Rätsel um die Quarkonium-Produktion am TeVatron im Rahmen der kollinearen Faktorisierung zu verdanken hat [CL96a, CL96b]. Dabei herrscht bis dato die Meinung, dass die massive Unterschätzung der differentiellen Wirkungsquerschnitte in Abbildung 7-1 alleine auf das Fehlen der Farboktett-Beiträge zurückzuführen ist. Wegen der faktorierten Form aus Gleichung (7.24) gehen die COME linear in den Gesamtwirkungsquerschnitt ein, so dass sie auf eine denkbar einfache Art und Weise zur Anpassung der absoluten Werte der Wirkungsquerschnitte an die Daten verwendet werden können.

Zur Illustration ist auf der rechten Seite der Abbildung 7-16 der reine Farboktett-Anteil zum χ_c in der k_\perp -Faktorisierung zu sehen, wobei für das COME ein Wert aus der kollinearen Faktorisierung [CL96a, CL96b] übernommen wurde. Die k_\perp -Faktorisierung erzwingt also im Vergleich zur kollinearen Rechnung eine massive Unterdrückung des COME aus Gleichung (7.40) von mindestens einer Größenordnung! Die Ursache liegt in dem effektiven NLLA-BFKL-Vertex, siehe auch Abbildung 7-15, der zu einer flacheren theoretischen Kurve führt, die kaum noch mit den Daten kompatibel ist. Mit einem erneuten Blick auf Abbildung 7-16 ist anzunehmen, dass sich der Wert des COME aus Gleichung (7.40) noch weiter reduziert, wenn mehr Datenpunkte bei höherem P_\perp vorliegen und der bisherige Trend beibehalten wird.

Zusammenfassend folgt also im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung aus der grundlegenden Forderung nach Eichinvarianz, die sich in dem effektiven Vertex

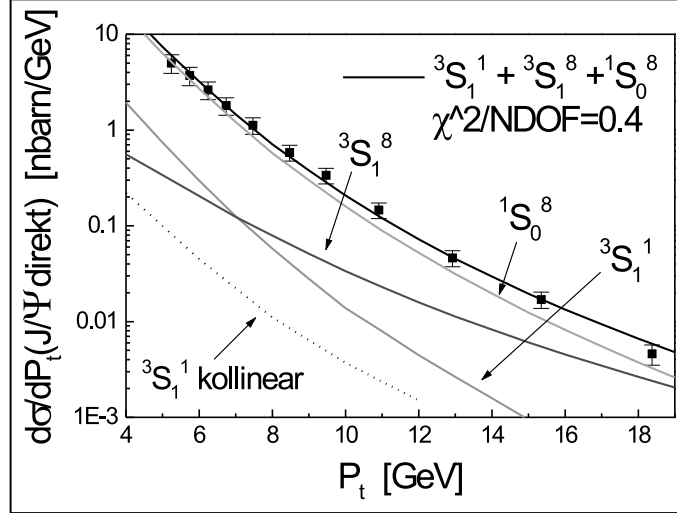


Abb. 7-17 Farboktett-Beiträge zur S -Wellen-Produktion

niederschlägt, eine theoretische Vorhersage für den ${}^3S_1^8$ -Beitrag, die wesentlich kleiner ausfällt als in der kollinearen Faktorisierung.

Für den Fall der direkten J/Ψ -Produktion ist selbstverständlich ein größerer Farboktett-Anteil zu erwarten. Allerdings ist von vornherein nicht klar, wie wichtig die drei Beiträge aus Abbildung 7-15 im einzelnen tatsächlich sind.

In Abbildung 7-17 sind die Farboktett-Beiträge für die direkte J/Ψ -Produktion in der k_\perp -Faktorisierung aufgetragen [HKS⁺01a]. Zunächst stellt sich heraus, dass die Steigungen der ${}^1S_0^8$ - und ${}^3P_J^8$ -Anteile numerisch kaum zu unterscheiden sind und daher nicht getrennt an die Daten gefittet werden können. Es wurde daher exemplarisch nur der ${}^1S_0^8$ -Beitrag verwendet. Der Farbsinglett- und der ${}^1S_0^8$ -Anteils sind sich ebenfalls sehr ähnlich. Aus diesem Grund kann das zugehörige COME so angepasst werden, dass alleine damit eine gute Beschreibung der Daten erreicht wird. Die Steigung des ${}^3S_1^8$ -Beitrags hingegen ist, wie zu erwarten, aufgrund des dabei zum Einsatz kommenden effektiven Vertex zu flach. Daraus ergibt sich eine Unterdrückung des ${}^3S_1^8$ - gegenüber dem ${}^1S_0^8$ -Anteil. Im Detail erhalten wir bei einem hervorragenden $\chi^2/\text{NDOF} = 0.4$ für die COME

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^3S_1^8) | 0 \rangle &= 3.2 (\pm 1.2) 10^{-4} \text{ GeV}^3, \\ M_{\underline{8}} &= 1.4 (\pm 0.1) 10^{-2} \text{ GeV}^3.\end{aligned}$$

Dabei ist es üblich, anstatt der einzelnen ${}^1S_0^8$ - und ${}^3P_J^8$ -Matrixelemente eine Linearkombination

$$M_{\underline{8}} = \frac{\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^3P_J^8) | 0 \rangle}{m_c^2} + \frac{\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}({}^1S_0^8) | 0 \rangle}{R}$$

mit $R \approx 4.5 \dots 6$ an die Daten anzupassen. Besonders wichtig sind nun nicht die absoluten Werte der gefitteten COME, sondern ein Vergleich mit den entsprechenden COME aus kollinearen Rechnungen. Dabei zeigt sich, dass der effektive Vertex erneut zu einer starken Reduktion des ${}^3S_1^8$ -Matrixelements

um etwa einen Faktor 30 relativ zu den Ergebnissen des kollinearen Zugangs führt. Eine mögliche Interpretation der Unterdrückung der $^3S_1^8$ -COME sowohl in der χ_c -Produktion als auch der J/Ψ -Produktion wurde von uns bereits in der Tabelle (7.35) vorbereitet. Unabhängig von der Ordnung in der Quarkgeschwindigkeit sind diese Matrixelemente in beiden Fällen von höherer Ordnung in der starken Kopplung, also gegenüber den anderen Singlett- beziehungsweise Oktett-Matrixelementen formal um einen Faktor α_S unterdrückt. Die $^3P_J^8$ - und $^1S_0^8$ -Beiträge zum J/Ψ sind hingegen von der gleichen Ordnung wie der Farbsinglett-Anteil und dementsprechend, wie in Abbildung 7-17 zu sehen ist, auch quantitativ von großer Bedeutung. Insgesamt ergibt sich der Eindruck, dass im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung die Quarkgeschwindigkeit v als Ordnungsparameter schlechter geeignet ist als die Kopplungskonstante, was im Hinblick auf den weichen Charakter der abgestrahlten Farboktett-Gluonen doch etwas erstaunlich ist. Eine mögliche Erklärung für diesen Umstand liegt in der Charmquarkmasse, die eventuell im Vergleich zur Masse des Bottomquarks nicht groß genug ist, um eine vollständig nichtrelativistische Behandlung des Bindungsprozesses zu einem Charmonium zu ermöglichen. In der Tat gibt es eine Abschätzung für die typische Quarkgeschwindigkeit in einem Charmonium-System von $v_c \approx 0.3$, woraus ersichtlich wird, dass die Geschwindigkeit in diesem Fall nur begrenzt als Störungsparameter im Sinne von $v \ll 1$ geeignet ist. Für die entsprechenden Bottom-Quarkonia nimmt man an, dass $v_b \approx 0.06$, daher sollte in diesem Fall eine nichtrelativistische Behandlung gerechtfertigt sein.

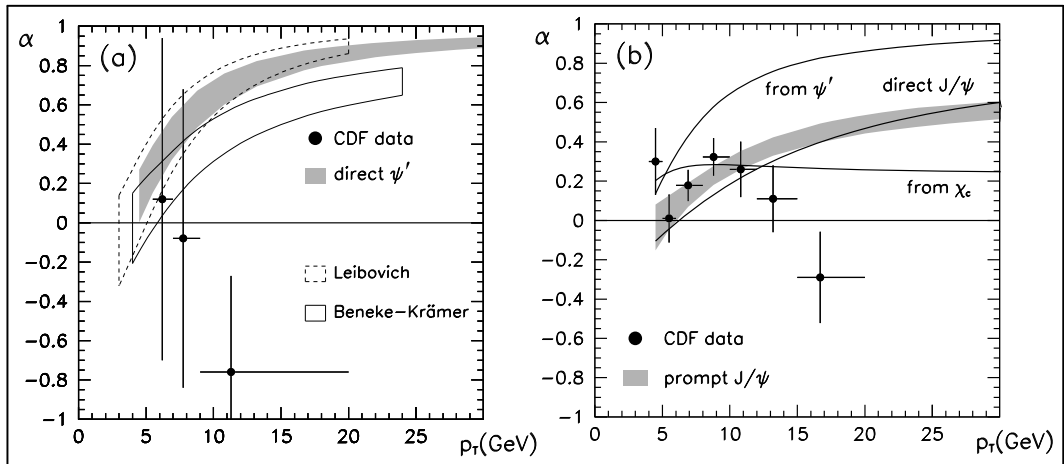


Abb. 7-18 Quarkonium-Polarisationen im Vergleich zum Experiment. Die Abbildungen sind der Arbeit [KL00] entnommen.

7.7 Produktion polarisierter Quarkonia

Die unter Umständen große Bedeutung der Reduktion der ${}^3S_1^8$ -COME im Vergleich zu kollinearen Rechnungen wird im Zusammenhang mit der Produktion von polarisierten Quarkonia deutlich. Schon früh erkannte man, dass der relativ große ${}^3S_1^8$ -Beitrag der kollinearen Untersuchungen zur Vorhersage einer starken transversalen Polarisation der produzierten J/Ψ für große Transversalimpulse $P_{\perp J/\Psi} \gtrsim 8$ GeV führt [BK97]. Entsprechend ernüchternd sind in diesem Zusammenhang die ersten Messungen polarisierter Charmonia von der CDF-Kollaboration [A⁺00b], die auf eine longitudinale Polarisation des J/Ψ bei hohem $P_{\perp J/\Psi}$ hindeuten. Dieser Widerspruch zwischen der kollinearen Vorhersage und dem Experiment [BKL00, KL00] in Abbildung 7-18 ist tatsächlich sehr ernst zu nehmen und könnte zum Beispiel auf einen fundamentalen Fehler im NRQCD-Produktionsmechanismus hindeuten. Unsere Untersuchungen im Rahmen der QMRK erlauben hingegen eine drastische Reduktion der für diesen Widerspruch verantwortlichen ${}^3S_1^8$ -COME, so dass es vielleicht möglich ist, über die Ersetzung der kollinearen Approximation durch die k_{\perp} -Faktorisierung und unter Beibehaltung der NRQCD-Faktorisierung zu einer guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment sowohl für polarisierte als auch unpolarisierte Charmonia zu gelangen [HKS⁺01a]. Diese Überlegungen werden durch die Arbeiten [YC01b, YC01c, YC01a] von Yuan und Chao auch quantitativ bestätigt.

Allerdings sind die bisherigen Daten zur Polarisation noch mit recht großen Fehlerbalken behaftet, so dass definitive Aussagen über die Bedeutung der einzelnen Produktionsmechanismen auf neue und genauere Experimente, zum Beispiel den Run II am TeVatron, warten müssen.

7.7.1 Produktion polarisierter Quarkonia und Messung der integrierten spinabhängigen Gluonverteilung

Die Messung der integrierten spinabhängigen Gluonverteilung $x\Delta g(x, Q^2)$ im Nukleon stellt eine wichtige Aufgabe insbesondere im Zusammenhang mit der Spinstruktur des Protons dar. Im Detail geht es um die Frage, ob und wie sich der Spin 1/2 des Protons in die Spins beziehungsweise Bahndrehimpulse seiner Konstituenten, der Quarks und Gluonen, zerlegen lässt. Unter bestimmten Voraussetzungen kann eine Nukleon-Spin-Summenregel [JTH96]

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Delta\Sigma(Q^2) + \Delta g(Q^2) + L_q(Q^2) + L_g(Q^2) \quad (7.41)$$

angegeben werden, die den Spin des Protons in die entsprechenden Anteile $\Delta\Sigma, \dots, L_g$ zerlegt, welche durch x -Integrale über die zugehörigen Verteilungsfunktionen gegeben sind [BJ98]. Bislang ist der Quarkspinanteil $\Delta\Sigma$ noch am besten bekannt und bei einem $Q^2 \sim 1$ GeV² vermutlich relativ klein, während

man über die Größe des Gluonspin-Anteils fast nichts weiß. Dementsprechend spannend und kontrovers ist daher noch die Frage nach der Bedeutung der Bahndrehimpulsbeiträge L_q und L_g . Sollte Δg , wie in einigen Analysen zur Zeit spekuliert wird, relativ groß, das heißt etwa von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, sein, würde das gemäß Gleichung (7.41) automatisch zu großen negativen Beiträgen des Quark- und/oder Gluonbahndrehimpulses führen. In diesem Fall ergäbe sich ein ganz neues und schon fast spektakuläres Bild einer von Bahndrehimpulsen dominierten Spinstruktur des Protons.

Im Hinblick auf eine genauere Bestimmung von $x\Delta g(x, Q^2)$ haben Jaffe und Kharzeev in [JK99] die Produktion des $\chi_{cJ=2}$ -Zustands in Proton-Proton-Kollisionen bei sehr kleinem Transversalimpuls $P_{\chi\perp} \approx 0$ des Quarkoniums untersucht. Dabei erlaubt die Einschränkung auf kleine Transversalimpulse auch im Rahmen der kollinearen Faktorisierung eine Beschränkung auf die führende Ordnung, die ja mit $P_{\chi\perp} = 0$ einhergeht. Die wesentlichen Ergebnisse ihrer Untersuchungen lauten, dass der Farbsinglett-Mechanismus nur die Produktion von χ_{c2} mit Polarisation $J_z = \pm 2$ erlaubt, während der Farboktett- 3S_1 -Beitrag in erster Linie zu χ_{c2} mit der Polarisation $J_z = \pm 1$ führt. Diese Auswahlregeln ergeben anschließend relativ einfache unpolarisierte und polarisierte differentielle Wirkungsquerschnitte. Für unpolarisierte Protonen gilt (siehe [JK99])

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto & g(x_1, m_{\chi_c}^2) g(x_2, m_{\chi_c}^2) \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3P_2^1) | 0 \rangle \right. \\ & \left. + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) c^8 \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3S_1^8) | 0 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

während die spinabhängige Verteilungsfunktion über die sogenannte Spin-Asymmetrie A eingeführt wird

$$\begin{aligned} A \equiv & \frac{d\sigma^{\uparrow\uparrow} - d\sigma^{\uparrow\downarrow}}{d\sigma^{\uparrow\uparrow} + d\sigma^{\uparrow\downarrow}} = - \frac{\Delta g(x_1, m_{\chi_c}^2) \Delta g(x_2, m_{\chi_c}^2)}{g(x_1, m_{\chi_c}^2) g(x_2, m_{\chi_c}^2)} \times \\ & \frac{\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3P_2^1) | 0 \rangle - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) c^8 \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3S_1^8) | 0 \rangle \right\}}{\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right) \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3P_2^1) | 0 \rangle + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) c^8 \langle 0 | \mathcal{O}^{\chi_c} (^3S_1^8) | 0 \rangle \right\}}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Dabei ist c^8 eine an dieser Stelle nicht weiter wichtige Konstante. Bei Kenntnis der integrierten Gluonverteilung $g(x, Q^2)$ lässt sich folglich durch Messung des winkelabhängigen Wirkungsquerschnittes aus Gleichung (7.42) das Verhältnis des Farbsinglett- und Farboktett-Matrixelements erneut experimentell bestimmen. Wird in einem weiteren Experiment mit polarisierten Protonen, die in Gleichung (7.43) durch Spin-up \uparrow und Spin-down \downarrow gekennzeichnet sind, die Asymmetrie A in Abhängigkeit von θ vermessen, kann anschließend die spinabhängige Gluonverteilung im Proton relativ sauber extrahiert werden. Soweit jedenfalls die Theorie. In der Praxis ist es selbstverständlich unmöglich, den Produktionsquerschnitt bei exakt verschwindendem Transversalimpuls $P_{\chi\perp} = 0$ zu bestimmen, so wie es die kollineare Approximation in LO prinzipiell verlangt. Die entscheidende Frage lautet nun, wie stark der Einfluss endlicher, wenn

auch kleiner Quarkonium-Transversalimpulse auf die im Rahmen der Analyse von Jaffe und Kharzeev verwendeten Auswahlregeln $J_z = \pm 2$ und $J_z = \pm 1$ für die Farbsinglett- respektive Farboktett-Produktion ist. In führender Ordnung entsprechen diese endlichen $P_{\chi\perp}$ natürlich nicht-verschwindenden Gluontransversalimpulsen, so dass an dieser Stelle eine Untersuchung im Rahmen der k_\perp -Faktorisierung sehr naheliegend ist. Dabei werden wir nicht versuchen, die Rechnungen aus [JK99] für den Fall der k_\perp -Faktorisierung zu wiederholen. Vielmehr wollen wir die Farbsinglett-Produktionsraten des χ_{c2} für alle denkbaren Polarisierungen $|J_z| = 0, 1, 2$ numerisch auswerten und so den Gültigkeitsbereich der Auswahlregeln bestimmen.

Wie bereits im Kapitel über die Produktion unpolarisierter Zustände angekündigt wurde, müssen im Falle der Produktion polarisierter Quarkonia die Gleichungen (7.16) durch geeignete Ausdrücke ersetzt werden, welche es erlauben, einzelne Spinausrichtungen herauszuprojizieren. Zunächst ist es nötig, einen zusätzlichen Lichtkegelvektor n mit

$$n \equiv \left(1, -\frac{\vec{P}_\chi}{|\vec{P}_\chi|} \right), n^2 = 0$$

zu definieren. Anschließend können die Summationen über einzelne Spinausrichtungen geschlossen und ohne explizite Darstellungen der Polarisationsstensenoren ausgeführt werden. Für die uns interessierenden Spin-2-Teilchen gilt [CWT95]

$$\begin{aligned} \sum_{|J_z|=0} \epsilon_{\mu\nu}(J_z) \epsilon_{\alpha\beta}(J_z) &= \frac{2}{3} \left(P_{\mu\nu} - \frac{3}{2} P_{\mu\nu}^T \right) \left(P_{\alpha\beta} - \frac{3}{2} P_{\alpha\beta}^T \right), \\ \sum_{|J_z|=1} \epsilon_{\mu\nu}(J_z) \epsilon_{\alpha\beta}(J_z) &= \frac{1}{2} (P_{\mu\alpha} P_{\nu\beta} + P_{\nu\alpha} P_{\mu\beta} - P_{\mu\alpha}^T P_{\nu\beta}^T - P_{\nu\alpha}^T P_{\mu\beta}^T) \\ &\quad + (P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta}^T + P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta} - P_{\mu\nu} P_{\alpha\beta} - P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^T), \\ \sum_{|J_z|=2} \epsilon_{\mu\nu}(J_z) \epsilon_{\alpha\beta}(J_z) &= \frac{1}{2} (P_{\mu\alpha}^T P_{\nu\beta}^T + P_{\nu\alpha}^T P_{\mu\beta}^T - P_{\mu\nu}^T P_{\alpha\beta}^T), \end{aligned} \quad (7.44)$$

wobei die Projektionsoperatoren $P_{\mu\nu}$ und $P_{\mu\nu}^T$ durch

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &\equiv -g_{\mu\nu} + \frac{P_{\chi\mu} P_{\chi\nu}}{P_\chi^2}, \\ P_{\mu\nu}^T &\equiv -g_{\mu\nu} + \frac{P_{\chi\mu} n_\nu + P_{\chi\nu} n_\mu}{n \cdot P_\chi} - \frac{P_\chi^2}{(n \cdot P_\chi)^2} n_\mu n_\nu, \end{aligned}$$

gegeben sind. Die etwas umfangreichen Gleichungen (7.44) können leicht durch Aufaddieren und Vergleich mit der entsprechenden Beziehung (7.16) auf ihre Konsistenz hin getestet werden. Die numerische Auswertung, zum Beispiel des Farbsinglett-Anteils zum χ_{c2} , verläuft dann völlig analog zur Produktion unpolarisierter χ_c . Allerdings darf nicht vergessen werden, dass wir nun speziell an dem Gebiet sehr kleiner Transversalimpulse, etwa $P_{\chi\perp} = 0 \dots 2$

GeV, interessiert sind, und es in diesem Bereich nicht möglich ist, eine phänomenologisch abgesicherte unintegrierte Gluonverteilung $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$ anzugeben, siehe auch unsere Diskussion im Abschnitt "Bereich kleiner Transversalimpulse". Solange wir an größeren Transversalimpulsen der auslaufenden Teilchen interessiert waren, konnte die Modifikation des Wirkungsquerschnittes gemäß Gleichung (5.9) dieses Problem durch Trennung von kollinearen und transversalen Anteilen vernünftig lösen. Im Bereich sehr kleiner $P_{\chi\perp}$ ist diese Herangehensweise aber nicht mehr geeignet, weil der Übergang vom kollinearen zum transversalen Gebiet bei Gluontransversalimpulsen $q_{i\perp}^2$ von 1 GeV^2 nicht stetig ist. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, in einem ersten Schritt nicht direkt die vollständigen Wirkungsquerschnitte für die Produktion der χ_{c2} zu berechnen, sondern nur die Verhältnisse der Amplitudenquadrate für verschiedene $|J_z|$. In der Hoffnung, dass bei der Bildung der Verhältnisse der potentielle Einfluss der unintegrierten Verteilungsfunktionen etwas abgeschwächt wird, lässt sich auf diesem Weg vielleicht schon ein erster Eindruck über die Relevanz der $|J_z| = 0$ und $|J_z| = 1$ -Beiträge im Vergleich zum $|J_z| = 2$ -Anteil gewinnen. Um die Bedeutung der Gluontransversalimpulse besonders klar herauszustellen, geben wir die Verhältnisse der Amplitudenquadrate in Abhängigkeit der beiden Variablen $|q_{1\perp}|$ und $|q_{2\perp}|$ an, die experimentell eigentlich nicht zugänglich sind. Weiterhin wird die Rapidität des produzierten χ_c fixiert, während die zu den Gluonimpulsen gehörigen Winkel ausintegriert werden.

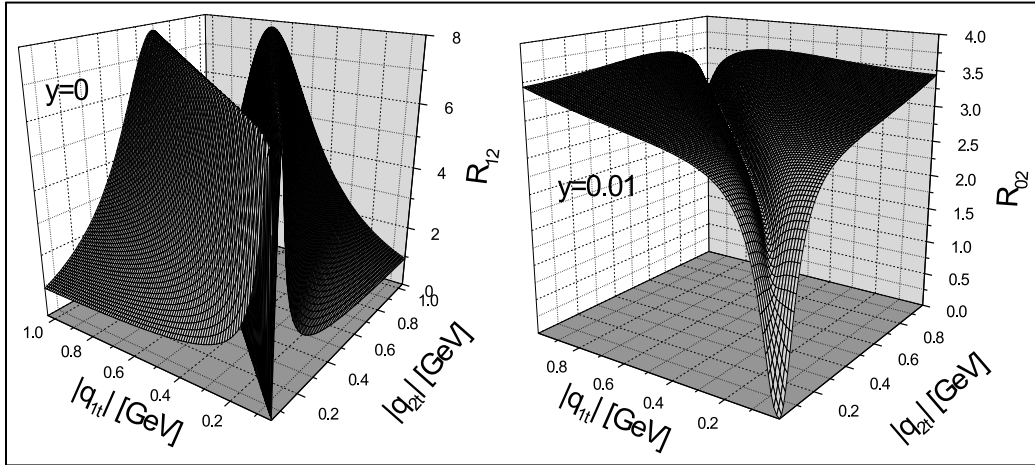


Abb. 7-19 Das Verhältnis R_{12} in Abhängigkeit der Gluontransversalimpulse

Das Ergebnis für die Verhältnisse R_{i2} der über die Winkel integrierten Amplitudenquadrate,

$$R_{i2} \equiv \frac{|A(|J_z| = i)|^2}{|A(|J_z| = 2)|^2}$$

ist in Abbildung 7-19 zu sehen. Zur Interpretation dieser Bilder rufen wir uns ins Gedächtnis, dass die kollineare Approximation in LO Vorhersagen für $|q_{1\perp}| = |q_{2\perp}| = 0$ macht, also für die vordersten Ecken der Abbildungen. Tatsächlich finden wir in diesem Punkt die kollineare Vorhersage bestätigt, denn die Verhältnisse werden sehr klein beziehungsweise gehen gegen Null, jedenfalls soweit man das den numerisch Rechnungen entnehmen kann. Allerdings

führen im Fall von R_{12} schon die kleinsten Gluontransversalimpulse zu einer dramatischen Abweichung von der kollinearen Vorhersage $R_{12} = 0$. Bereits bei minimalem endlichen intrinsischen Gluontransversalimpuls übertrifft die Produktionswahrscheinlichkeit von χ_c mit $|J_z| = 1$ die $|J_z| = 2$ -Wahrscheinlichkeit bei weitem! Es entsteht der Eindruck, als ob sich die kollineare Approximation in einer fast schon singulären Art und Weise in Form eines engen Tals mit der Talsohle bei $|q_{1\perp}| = |q_{2\perp}|$ in die Fläche für endliche Transversalimpulse schneidet. Für das Verhältnis R_{02} findet man eine wesentlich gleichmäßigere Fläche, allerdings nähert sie sich erneut erst bei sehr kleinen Transversalimpulsen der kollinearen Approximation $R_{02} = 0$ an. Die Rapidity mussten wir dabei ungleich Null setzen, da der kollineare Grenzfall in der Abbildung sonst nicht mehr dargestellt werden könnte. Es wird deutlich, dass man bei einer einfachen Anwendung der Analyse aus [JK99] auf ein realistisches Experiment aller Wahrscheinlichkeit nach mit Problemen zu kämpfen haben wird. Vielleicht gelingt es aber noch, durch Anpassung der Kinematik die Verhältnisse R_{i2} auf einen mit der kollinearen Analyse verträglichen kleinen Wert zu drücken. Dazu betrachten wir nun die Verhältnisse in Abhängigkeit der Transversalimpulse und der Rapidity y .

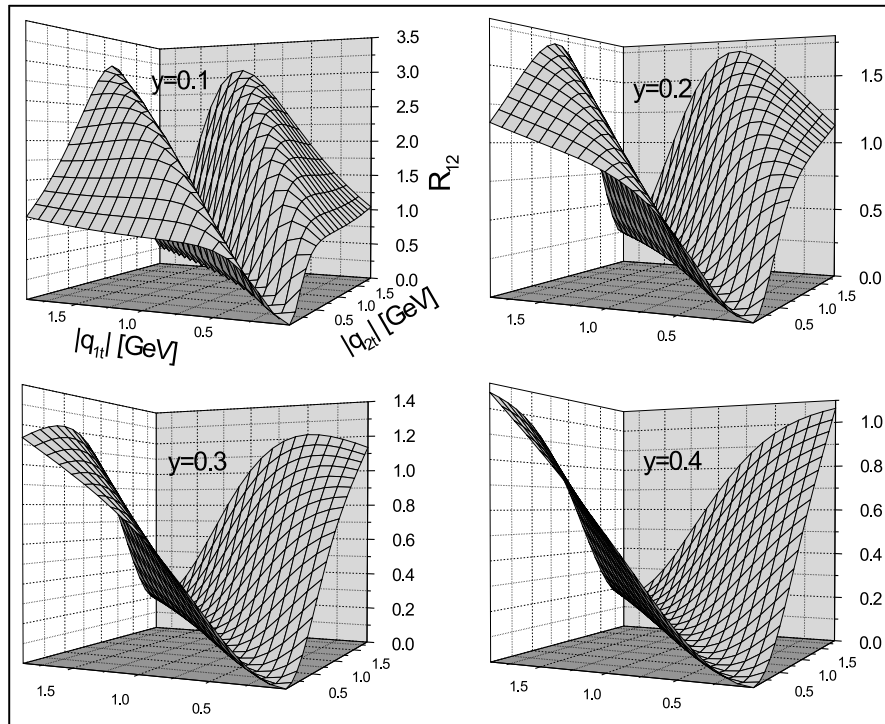


Abb. 7-20 Die Verhältnisse R_{i2} für verschiedene Rapiditäten

In Abbildung 7-20 ist R_{12} mit steigender Rapidity von oben links ($y = 0.1$) nach unten rechts ($y = 0.4$) angeordnet. Dabei ist zu erkennen, dass der kollineare Grenzfall für größere Rapiditäten immer früher, das heißt bereits bei etwas größeren Transversalimpulsen, erreicht wird. In Abbildung 7-21 ist noch einmal das Verhältnis R_{02} für $y = 0.1$ abgebildet, und auch hier zeigt sich im Vergleich zu Abbildung 7-19 ein Abflachen hin zu kleinen $|q_{i\perp}|$. Daraus lässt

sich unter Umständen ableiten, wie die kollineare Analyse aus [JK99] doch auf eine realistische experimentelle Situation angewandt werden kann.

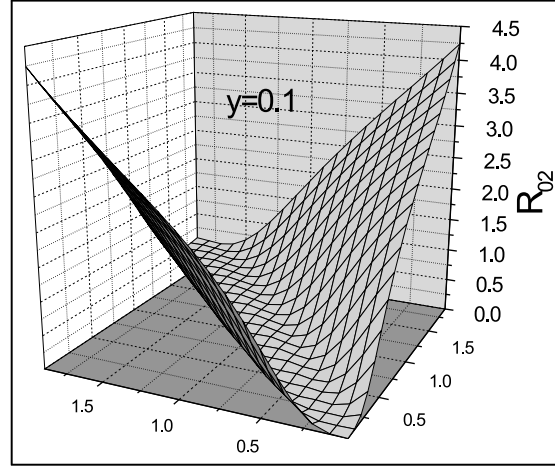


Abb. 7-21 Das Verhältnis R_{02} bei einer Rapidität von $y = 0.1$

Durch Einführung eines experimentellen Cuts in der Rapidität, zum Beispiel $1 \leq |y| \leq 2$, und gleichzeitiger Beschränkung auf kleine Transversalimpulse ist es vielleicht möglich, den Einfluss der $|J_z| = 0$ - und $|J_z| = 1$ -Anteile soweit zu drücken, dass sie nur noch als systematischer Fehler von zum Beispiel 10% oder ähnlich in die Rechnungen mit einfließen. Um diese Überlegungen zu untermauern, wollen wir nun doch versuchen, gewisse Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte beziehungsweise deren Verhältnisse zu machen. Dazu verwenden wir die Ergebnisse der Untersuchungen von Blümlein aus [Blü], worin gezeigt wird, dass die unintegrierte Gluonverteilung $\mathcal{F}(x, k_\perp^2)$ im Proton aus einer integrierten Gluonverteilung $xg(x, Q^2)$ sowie der Lösung der sogenannten homogenen Lipatov-Gleichung bestimmt werden kann. Die integrierte Verteilung wird dabei nicht näher bestimmt und muss aus Fits an experimentelle Daten extrahiert werden. Die bei diesen Fits zum Einsatz kommende Faktorisierung ist natürlich die kollineare Faktorisierung, so dass bei der Methode von Blümlein von vornherein nicht klar ist, ob sie für die k_\perp -Faktorisierung phänomenologisch relevante unintegrierte Verteilungsfunktionen liefert. Der Grund, warum die Ergebnisse aus [Blü] an dieser Stelle verwendet werden sollen liegt einzig und allein darin, dass die auf diesem Weg berechneten unintegrierten Verteilungsfunktionen wenigstens prinzipiell auch für sehr kleine Transversalimpulse gültig sind und wir somit die χ_{c2} -Wirkungsquerschnitte auch bei sehr kleinem P_{χ_\perp} auswerten können. Um ihre phänomenologische Bedeutung besser abschätzen zu können, ist es sinnvoll, die unintegrierte Verteilungsfunktion im Rahmen der Untersuchungen von Blümlein für zwei verschiedene Parametrisierungen der integrierten Gluonverteilung zu berechnen. Wir wählen eine GRV-Parametrisierung [GRV95] sowie zum Vergleich eine Parametrisierung der CTEQ-Collaboration [L⁺95]. Die Ergebnisse für die Produktion der polarisierten χ_{c2} unter Verwendung der unintegrierten Verteilung aus [Blü] folgen dann ohne eine spezielle Behandlung des Gebietes kleiner Gluontransversalimpulse direkt aus der Gleichung für den Wirkungsquerschnitt in der k_\perp -Faktorisierung.

Die numerischen Resultate sind in Abbildung 7-22 zu sehen.

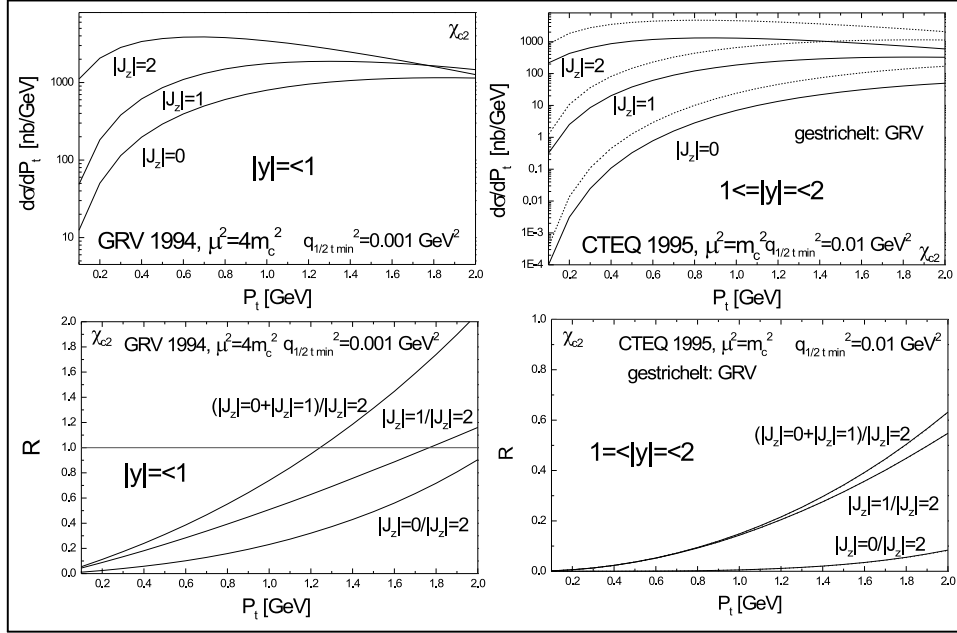


Abb. 7-22 Produktion polarisierter P -Wellen für verschiedene Rapiditäten

Die beiden Graphen auf der rechten Seite wurden unter Verwendung der GRV-Parametrisierung und einem Cut in der Rapidität von $|y| < 1$ berechnet. Oben sind die absoluten differentiellen Wirkungsquerschnitte aufgetragen, während die unteren beiden Bilder die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte zeigen. Für den Cut $|y| < 1$ fällt zunächst auf, dass entsprechend unserer Vorhersage im Zusammenhang mit den Verhältnisse R_{i2} die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte bei kleiner Rapidität bereits bei kleinen Transversalimpulsen von der kollinearen Vorhersage abweichen. Schon bei einem $P_{\chi\perp}$ von etwa 0.5 GeV beläuft sich der Anteil der $|J_z| = 0$ - und $|J_z| = 1$ -Polarisationen auf etwa 30 – 40% des $|J_z| = 2$ -Wirkungsquerschnitt und ist damit sicherlich nicht zu vernachlässigen. Eine Extrahierung der polarisierten Gluonverteilung basierend auf der Analyse aus [JK99] wäre in diesem Fall nicht möglich. Geht man allerdings zu höheren Rapiditäten über, wird die kollineare Approximation deutlich besser, wie sich aus dem Graphen unten rechts in Abbildung 7-22 leicht ablesen lässt. Hier liegt der $|J_z| = 0, 1$ -Anteil im Vergleich zur $|J_z| = 2$ -Polarisation für einen Wert von $P_{\chi\perp} \sim 0.5$ GeV nur noch bei ungefähr 5 – 10% und kann damit unter Umständen im Rahmen einer kollinearen Rechnung als systematischer Fehler behandelt werden. Es bleibt nur noch die Frage, inwiefern diese Überlegungen von der Wahl der integrierten Verteilung abhängen. Leider ist die Abhängigkeit in Bezug auf die absoluten Wirkungsquerschnitte sehr groß, wie in Abbildung 7-22 rechts oben deutlich zu sehen ist. Die Methode von Blümlein liefert an dieser Stelle also keine phänomenologisch sinnvolle unintegrierte Verteilungsfunktion. Daher sind die beiden oberen Graphen auch nicht als Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte zu verstehen! Ganz anders sieht es hingegen bei den Verhältnissen R der Wirkungsquerschnitte aus. In der bereits diskutierten Abbildung unten rechts sind tatsächlich die Resultate

für beide Parametrisierungen eingetragen, allerdings liegen sie so dicht aufeinander, dass sie mit bloßem Auge nicht zu unterscheiden sind. Anscheinend sind die Verhältnisse der Produktionsquerschnitte sehr stabil gegenüber der Veränderung der unintegrierten Verteilungsfunktion. Aus diesem Grund können wir die Graphen in Abbildung 7-22 unten rechts als Vorhersagen für die entsprechenden Messgrößen ansehen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass eine experimentelle Bestimmung der spinabhängigen integrierten Gluonverteilung im Proton im Rahmen der Untersuchung aus [JK99] aufgrund der endlichen intrinsischen Gluontransversalimpulse im Prinzip mit großen Schwierigkeiten behaftet ist. Wählt man die Cuts hingegen so, dass nur relativ große Rapiditäten beitragen, zum Beispiel $|y| > 1$, werden die Vorhersagen der kollinearen Approximation in LO bei einem $P_{\chi\perp} \sim 0.5$ GeV bis auf einen systematischen Fehler von etwa 10% erreicht. Die kollineare Analyse von Jaffe und Kharzeev erlaubt dann entsprechend den Gleichungen (7.42) und (7.43), bis auf einen gewissen systematischen Fehler, formal die Extraktion von $x\Delta g(x, Q^2)$ aus den Daten zur χ_{c2} -Produktion.

8. ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen dieser Arbeit werden hochenergetische semi-inklusive Teilchenstöße, unter anderem Proton-Antiproton-Kollisionen am TeVatron, im kinematischen Bereich kleiner longitudinaler Impulsüberträge x untersucht. Am Beispiel der zentralen Produktion von Bottom-Antibottom-Paaren und den χ_c - sowie J/Ψ -Quarkonia werden dabei P_\perp -differentielle Wirkungsquerschnitte berechnet und mit experimentellen Daten verglichen.

8.1 Die physikalischen Grundlagen

Das Fundament unserer Überlegungen und Rechnungen liegt in der zentralen Hochenergie-Näherung, die, wie zu Beginn der Arbeit gezeigt, ohne weitere Approximationen zu der Quasi-Multi-Regge-Kinematik führt. Die QMRK zeichnet sich dabei im Detail durch virtuelle Gluonen mit endlichem Transversalimpuls beziehungsweise einem rein transversalen, nichtverschwindenden Impulsübertrag im t -Kanal aus. Aufgrund der elementaren Forderung nach Eichinvarianz wird für die Quark-Antiquark-Produktion ein neuer Produktionsmechanismus benötigt, der durch den effektiven NLLA-BFKL-Vertex $\psi^{c_2 c_1}$ gegeben ist. Die Untersuchung des effektiven Vertex ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit.

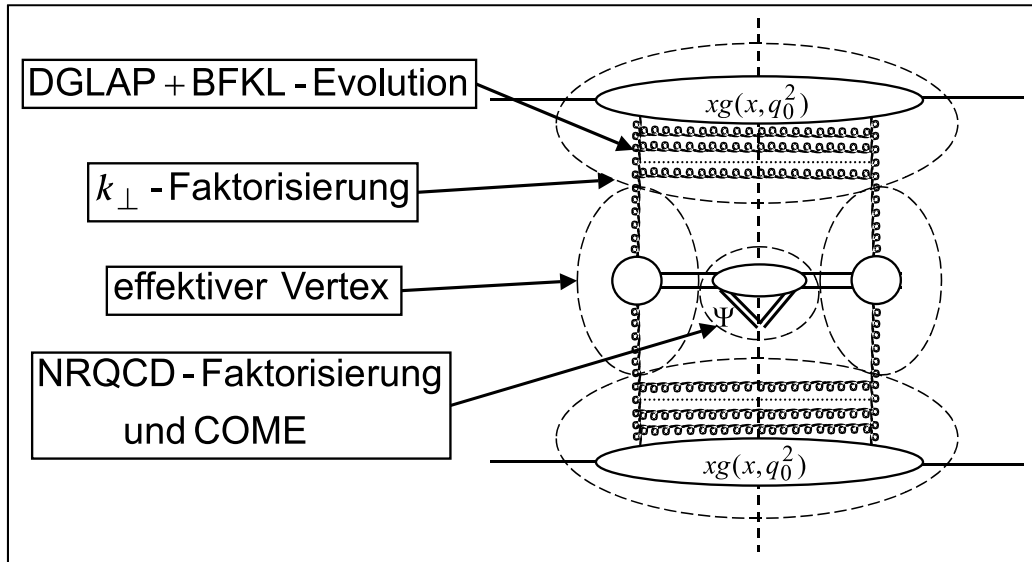


Abb. 8-1 Die Elemente des Quarkonium-Wirkungsquerschnitts

Weiterhin muss als direkte Folge der QMRK für die Beschreibung der nicht-perturbativen Struktur der primären Stoßpartner die k_\perp -Faktorisierung einge-

setzt werden. Im Unterschied zur kollinearen Faktorisierung tritt in diesem Zusammenhang die unintegrierte Gluonverteilungsfunktionen \mathcal{F} auf, die letztlich aus experimentellen Daten, zum Beispiel der gemessenen F_2 -Strukturfunktion, extrahiert wird. Die Bestimmung der von uns verwendeten unintegrierten Gluonverteilungsfunktion basiert dabei auf einer Kombination von BFKL- und DGLAP-Evolutionsgleichungen und einer integrierten Anfangsverteilung $xg(x, q_0^2)$.

Bezüglich der Produktion eines schweren Quarkoniums Ψ spielt im Rahmen der nichtrelativistischen QCD ein weiteres Faktorisierungstheorem eine entscheidende Rolle. Dieses erlaubt im Fall der semi-inklusiven Quarkonium-Produktion die Trennung von perturbativer Quark-Antiquark-Erzeugung und der Hadronisierung des Quark-Antiquark-Paares, die durch die Color-Octet-Matrixelemente (COME) parametrisiert wird.

Die eben aufgeführten Elemente QMRK, k_\perp -Faktorisierung, Evolution, effektiver Vertex, NRQCD-Faktorisierung und COME sowie ihr Zusammenspiel sind der Übersicht halber noch einmal in Abbildung 8-1 dargestellt.

8.2 Die erzielten Resultate

Auf der theoretischen Seite ist es gelungen, sowohl den bereits bekannten Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Quark-Antiquark-Paares unter Annahme der k_\perp -Faktorisierung erneut zu berechnen als auch den Charakter dieser Faktorisierung und die Unterschiede sowie den Zusammenhang zur kollinearen Faktorisierung darzustellen. In den weiteren Untersuchungen zeigt sich, dass der effektive Produktionsvertex von masselosen Quark-Antiquark-Paaren auf einem einfachen Weg durch Einbau der Quarkmassen auf die Produktion schwerer Quarks erweitert werden kann, ohne die Eichinvarianz des ursprünglichen Ergebnisses zu zerstören. Durch eine geeignete Modifikation des Wirkungsquerschnittes ist es anschließend möglich, auch den problematischen Bereich kleiner Gluontransversalimpulse konsistent zu berücksichtigen und so die Gleichungen einer numerischen Behandlung zugänglich zu machen.

Als erste numerische Ergebnisse sind die P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitte sowie Korrelationen für die Bottom-Antibottom-Produktion am Tevatron zu nennen, die eine hervorragende qualitative, und im Rahmen der Fehlerbalken auch quantitative, Übereinstimmung mit den gemessenen Daten zeigen. Basierend auf dem Farbsinglett-Modell zeigen die P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitt für die χ_c -Produktion ebenfalls eine sehr gute, parameterfreie Beschreibung der Daten von der CDF-Kollaboration. Im Zusammenhang mit der direkten J/Ψ -Produktion stellt sich heraus, dass trotz der zusätzlichen Abstrahlung eines weiteren harten Gluons die Zahl der auftretenden Feynmangraphen auf einen kleinen Satz eichinvarianter Diagramme reduziert werden kann, deren Berechnung im Rahmen der QMRK keine zusätzlichen Schwierigkeiten bereitet. Bei der numerischen Auswertung der Farbsinglett-Produktion des J/Ψ und dem Vergleich mit den experimentellen Resultaten

findet man im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung eine massive Unterschätzung des Wirkungsquerschnittes um etwa einen Faktor 8-10. Unter Berücksichtigung der NRQCD-Faktorisierung wird allerdings deutlich, dass im Fall der J/Ψ -Produktion die Farboktett-Anteile formal von der gleichen Ordnung in der starken Kopplung sind wie die Farbsinglett-Beiträge und daher notwendigerweise mitgenommen werden müssen. Die Hinzunahme der Farboktett-Beiträge und der Fit der COME führt anschließend, gemessen am χ^2/NDOF , zu einer exzellenten Beschreibung der experimentellen Wirkungsquerschnitte für das χ_c - und das J/Ψ -Meson. Dabei zeigt der effektive Vertex einen besonders deutlichen Einfluss auf die $^3S_1^8$ -COME, die im Vergleich zu kollinearen NLO-Untersuchungen bis zu einem Faktor 30 reduziert sind.

8.3 Bewertung und Kritik

Die Überlegungen und Rechnungen dieser Arbeit basieren mit der Hochenergie-Näherung beziehungsweise der QMRK auf einer soliden Grundlage. Da die verwendeten unintegrierten Gluonverteilungen bereits ab einem longitudinalen Impulsbruchteil von etwa $x \approx 0.1$ gegen Null streben, ist der Wirkungsquerschnitt sogar gegen eine falsche Anwendung der QMRK bei relativ großem $x \geq 0.1$ abgesichert. Entscheidend ist weiterhin, dass die QMRK, im Zusammenhang mit der k_{\perp} -Faktorisierung und unintegrierten Verteilungsfunktionen, die störungstheoretische Berechnung von eichinvarianten QCD-Produktionsamplituden mit äußeren virtuellen Linien erlaubt. Prinzipiell geht man auf diesem Weg einen bedeutenden Schritt über die bisherige Standardmethode der kollinearen Faktorisierung hinaus. Unsere numerischen Ergebnisse zur Bottom-Antibottom-Produktion zeigen, dass im Rahmen der QMRK und unter Verwendung des effektiven Vertex bereits in führender Ordnung (LO) der starken Kopplungskonstanten die gemessenen Quark-Antiquark-Korrelationen am TeVatron wesentlich besser beschrieben werden als durch die kollinearen NLO-Rechnungen. Gleichzeitig stellt dieses numerische Resultat eine starke Untermauerung der k_{\perp} -Faktorisierung an sich dar, denn die von uns verwendete unintegrierte Verteilung wurde nicht an die TeVatron-Daten für Proton-Antiproton-Reaktionen, sondern an die Elektron-Proton-Streuung bei HERA, angepasst. Zusammengekommen hat die Kombination von QMRK, k_{\perp} -Faktorisierung und effektiven eichinvarianten Vertices damit das Potential, sich als Standardberechnungsmethode für differentielle Hochenergie-Wirkungsquerschnitte zu etablieren. Besonders im Hinblick auf die in den nächsten Jahren anlaufenden Experimente am LHC/CERN könnte es von entscheidendem Vorteil sein, die kollineare Faktorisierung, deren Gültigkeit sich tatsächlich auf nicht zu kleine Werte von x beschränkt [Mue97], durch die in dieser Arbeit beschriebenen Methoden, soweit es möglich ist, zu ersetzen. Diese Einschätzungen sind insofern neu, als dass sämtliche bisherigen Rechnungen anderer Autoren im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung [LRSS91, RSS01] weder effektive eichinvariante Vertices noch phänomenologisch beziehungsweise experimentell abgesicherte unin-

tegrierte Verteilungsfunktionen beinhalten und somit keine fundierten quantitativen Vorhersagen erlauben.

Der effektive Quark-Antiquark-Vertex wird im Rahmen dieser Arbeit zum ersten Mal überhaupt in seiner Funktion als Produktionsvertex in hochenergetischen Teilchenkollisionen untersucht und verwendet. Seine Bedeutung bestand bis dato nur im Zusammenhang mit den über viele Jahre von verschiedenen Autoren zusammengetragenen NLLA-Korrekturen zur BFKL-Gleichung. Während die NLLA-BFKL-Gleichung zur Zeit mit großen phänomenologischen Problemen zu kämpfen hat [Lev], bleibt der Quark-Antiquark-Vertex als eichinvarianter Produktionsmechanismus im Rahmen der QMRK davon unberührt. Ganz im Gegenteil gewinnt der effektive Vertex durch unsere Untersuchungen stark an Bedeutung. Sein Einfluss auf die Steigung der P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitte und Korrelationen bei der Bottom-Antibottom-Erzeugung ist ganz wesentlich für die gute Übereinstimmung der Vorhersagen mit dem Experiment. Im Zusammenhang mit der NRQCD-Faktorisierung und den COME führen die effektiven Anteile des NLLA-BFKL-Vertex zwangsläufig zu einer starken Reduktion der Farboktett- 3S_1 -Beiträge, was im Hinblick auf die Produktion von polarisierten Quarkonia von entscheidender Bedeutung sein könnte. Wie bereits ausgeführt, steht das COME $\langle 0 | \mathcal{O}^{J/\Psi}(^3S_1^8) | 0 \rangle$ im unmittelbaren Zusammenhang mit der Vorhersage von transversal polarisierten J/Ψ gerade bei größerem Transversalimpuls, während die aktuellen Daten vom TeVatron eher in Richtung un- oder longitudinal polarisierter direkter J/Ψ 's deuten. Dieser Widerspruch, der den Urhebern des Farboktett-Mechanismus zur Zeit wohl einiges Kopfzerbrechen bereitet, wird im Rahmen der QMRK allein durch den wichtigen Beitrag des effektiven Vertex aufgelöst. Für eine weitergehende Untersuchung dieses Aspekts siehe auch [YC01c].

Abgesehen vom eigentlichen effektiven Anteil des NLLA-BFKL-Vertex ist die Struktur der Standard-LO-Feynmandiagramme, zum Beispiel im Zusammenhang mit der Farbsinglett-Produktion des χ_c -Quarkoniums, aufgrund der endlichen Gluontransversalimpulse beziehungsweise ihrer Virtualität bereits wesentlich komplizierter als im kollinearen Fall. Dieser Umstand zeigt sich in der k_\perp -Faktorisierung sehr schön bei der vollständigen Außerkraftsetzung des Landau-Yang-Theorems im Fall der Produktion von $\chi_{cJ=1}$ -Zuständen, deren Erzeugung in der kollinearen Faktorisierung in LO nicht möglich ist. Das Experiment, soweit man das sagen kann, entscheidet sich hier eindeutig für die QMRK und gegen die Annahme von kollinearen, reellen Partonen. Weiterhin ist es im Rahmen der QMRK bereits in führender Ordnung möglich, die durchaus nichtrivialen P_\perp -differentiellen Wirkungsquerschnitte und Korrelationen vorherzusagen, während in der kollinearen Approximation kein Weg an der Abstrahlung von einem oder mehreren zusätzlichen harten Gluonen zwecks der Erzeugung von Transversalimpuls und auch Gluonvirtualität vorbeiführt.

Wie wir bereits bei der NLO-Produktion des J/Ψ -Mesons im Fall der k_\perp -Faktorisierung gesehen haben, wird es in der Regel keine leichte Aufgabe sein, höhere Korrekturen in α_S im Rahmen der QMRK zu berechnen. Die Schwierigkeit liegt hier in der Tatsache begründet, dass die äußeren virtuellen Gluonen die Hinzunahme von effektiven Anteilen zu den Standard-Diagrammen im Hinblick auf den Erhalt der Eichinvarianz erzwingen. Nach dem heutigen Kennt-

nisstand ist es leider nicht klar, wie diese effektiven Vertices n -ter Ordnung, also N^n LLA-BFKL-Produktions-Vertices, zu berechnen sind. Hier hat die kollineare Näherung also einen eindeutigen Vorteil, da Diagramme mit ausschließlich reellen äußeren Linien jedenfalls prinzipiell zu jeder Ordnung Störungstheorie durch Anwendung der Feynman-Regeln erhalten werden können. Dabei sollte man allerdings anmerken, dass schon ab NNLO der technische Aufwand wegen der größeren Anzahl der auftretenden Graphen, und den immer komplizierteren divergenten Schleifendiagrammen ziemlich groß wird. Die Berechnung noch höherer Korrekturen wird aus denselben Gründen eher früher als später sinnlos.

Trotz alledem erscheint es notwendig, die nächsten Korrekturen zur Quark-Antiquark-Produktion in der QMRK zu berechnen sowie die entsprechenden Wirkungsquerschnitte numerisch auszuwerten und mit den Daten zu vergleichen. Erst wenn sich diese Korrekturen als maßvoll im Vergleich zur führenden Ordnung erweisen und nicht die bisherige gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, zum Beispiel im Fall der Bottom-Antibottom-Produktion, verschlechtern, kann der hier vorgestellte Formalismus endgültig als die Methode der Wahl angesehen werden.

9. AUSBLICK

Der in dieser Arbeit in Anwendung auf Proton-Proton-Kollisionen vorgestellte und untersuchte Formalismus, bestehend aus der QMRK, der k_{\perp} -Faktorisierung, dem effektiven eichinvarianten Produktionsvertex und einer phänomenologisch sinnvollen unintegrierten Gluonverteilungsfunktion, lässt sich auf die Berechnung zahlreicher weiterer Hochenergie-Prozesse übertragen. Im Zusammenhang mit der Produktion eines schweren Quark-Antiquark-Paares wäre es interessant, die Produktion eines $c\bar{c}$ -Paares ("open charm") zu betrachten und mit Daten zu vergleichen. Leider liegen zur Zeit nur open charm-Daten von fixed-target Experimenten vor, auf die unsere Rechnungen nicht anwendbar sind. Neben der Erzeugung von Quark-Paaren lässt sich ebenfalls ohne zusätzlichen großen Aufwand die Produktion eines Gluon-Paares berechnen und mit Jet-Produktionsdaten vergleichen. Der dabei zum Einsatz kommende eichinvariante Vertex wäre der NLLA- gg -Vertex [FL96], dessen komplexe Struktur auf diesem Weg phänomenologisch untersucht werden könnte.

Im Rahmen der Erzeugung gebundener Zustände ist es von großer Bedeutung, einen Teil der in dieser Arbeit durchgeführten Rechnung auf $b\bar{b}$ -Zustände zu übertragen, das heißt die P_{\perp} -differentiellen Wirkungsquerschnitte für das χ_b - und das Υ -Meson auszuwerten und mit den zum Teil bereits vorliegen beziehungsweise im Run II vom TeVatron zu erwartenden Daten zu vergleichen. Diese Arbeiten sind, basierend auf den bisherigen Untersuchungen, vergleichsweise wenig aufwendig und zum Teil bereits in Angriff genommen. Aufgrund der relativ großen Masse des Bottom-Quarks ist die Anwendung der NRQCD in diesem Fall besser gerechtfertigt und sollte dementsprechend gute Resultate liefern.

Entsprechend der k_{\perp} -Faktorisierung lassen sich prinzipiell sämtliche bereits erwähnten Prozesse auch auf die Elektro- und Photoproduktion übertragen. Solche Rechnungen und der Vergleich mit den Daten insbesondere von HERA würden einen wichtigen Einblick in den Gültigkeitsbereich der k_{\perp} - sowie der NRQCD-Faktorisierung erlauben. Sie sind zum Teil bereits durchgeführt worden [LSZ00], allerdings ohne Verwendung der unintegrierten Verteilungsfunktion von Kwiecinski, Martin und Stasto [KMS97]. Die aktuellen HERA-Ergebnisse deuten in Bezug auf bestimmte kinematische Bereiche sogar auf eine Diskrepanz zwischen den kollinearen NRQCD-Vorhersagen und den experimentell bestimmten J/Ψ -Wirkungsquerschnitten hin [CK96, SMS98], weswegen eine Untersuchung im Rahmen der k_{\perp} -Faktorisierung an dieser Stelle sehr angebracht wäre.

Ebenfalls im Hinblick auf die zu erwartenden experimentellen Ergebnisse vom TeVatron Run II ist es wichtig, die Produktion polarisierter Charmonia und Bottomonia im Detail und unter Angabe von Fehlerabschätzungen im k_{\perp} -Formalismus zu berechnen. Es ist anzunehmen, dass die neueren Daten zu wesentlich genaueren Aussagen über die absoluten und relativen Werte der COME führen und sich damit das Interesse am NRQCD-Produktionsmechanismus

noch verstärkt wird.

Die theoretischen Untersuchungen von diffraktiven Prozessen im Zusammenhang mit der k_{\perp} -Faktorisierung stehen noch ziemlich am Anfang. Um modellunabhängige Vorhersagen machen zu können, muss man zunächst in der Lage sein, unintegrierte Gluonverteilungen für diffraktive Streuungen zu definieren und zu bestimmen [MR]. Weiterhin verlangt die Frage nach der eigentlichen Faktorisierung solcher Prozesse noch mehr Aufmerksamkeit, bevor phänomenologisch bedeutsame quantitative Vorhersagen getroffen werden können.

Generell ist es natürlich unerlässlich, in Bezug auf alle verwendeten Näherungen, also die Hochenergie-Näherung beziehungsweise die QMRK sowie die nichtrelativistischen Approximationen der NRQCD, höhere Ordnungen zu berechnen und die Ergebnisse mit dem Experiment zu vergleichen. Erst wenn sich diese Beiträge als nicht-dominant und damit als wirkliche Korrekturen zur führenden Ordnung erweisen, kann eine gute Übereinstimmung mit den Daten als Bestätigung der theoretischen Grundlagen angesehen werden.

Literaturverzeichnis

- [A⁺94] C. Albajar et al. Measurement of b anti-b correlations at the cern p anti-p collider. *Z. Phys.*, C61:41–52, 1994.
- [A⁺97a] F. Abe et al. Measurement of b anti-b production correlations, b0 anti-b0 mixing, and a limit on epsilon(b) in p anti-p collisions at s^{**}(1/2) = 1.8-tev. *Phys. Rev.*, D55:2546–2558, 1997.
- [A⁺97b] F. Abe et al. Production of j/psi mesons from chi/c meson decays in p anti-p collisions at s^{**}(1/2) = 1.8-tev. *Phys. Rev. Lett.*, 79:578–583, 1997.
- [A⁺00a] B. Abbott et al. The b anti-b production cross section and angular correlations in p anti-p collisions at s^{**}(1/2) = 1.8- tev. *Phys. Lett.*, B487:264–272, 2000.
- [A⁺00b] T. Affolder et al. Measurement of j/psi and psi(2s) polarization in p anti-p collisions at s^{**}(1/2) = 1.8-tev. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2886–2891, 2000.
- [Abe] F. Abe. Production of j / psi from chi(c) decays at cdf. Contributed to LP’95: International Symposium on Lepton Photon Interactions (IHEP), Beijing, P.R. China, 10-15 Aug 1995.
- [AP77] G. Altarelli und G. Parisi. Asymptotic freedom in parton language. *Nucl. Phys.*, B126:298, 1977.
- [BBL95] Geoffrey T. Bodwin, Eric Braaten, und G. Peter Lepage. Rigorous qcd analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Phys. Rev.*, D51:1125–1171, 1995.
- [BFY96] Eric Braaten, Sean Fleming, und Tzu Chiang Yuan. Production of heavy quarkonium in high-energy colliders. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 46:197, 1996.
- [BJ98] S. V. Bashinsky und R. L. Jaffe. Quark and gluon orbital angular momentum and spin in hard processes. *Nucl. Phys.*, B536:303–317, 1998.
- [BK97] Martin Beneke und Michael Kramer. Direct j/psi and psi’ polarization and cross-sections at the tevatron. *Phys. Rev.*, D55:5269–5272, 1997.

- [BKL00] Eric Braaten, Bernd A. Kniehl, und Jungil Lee. Polarization of prompt j/ψ at the tevatron. *Phys. Rev.*, D62:094005, 2000.
- [BL78] I. I. Balitsky und L. N. Lipatov. The pomeranchuk singularity in quantum chromodynamics. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 28:822–829, 1978.
- [Blü] J. Blümlein. On the $k(T)$ dependent gluon density in hadrons and in the photon. *hep-ph/9506446*, In *Les Arcs 1995, QCD and high energy hadronic interactions*, Seiten 191–197.
- [BP69] J. D. Bjorken und Emmanuel A. Paschos. Inelastic electron proton and gamma proton scattering, and the structure of the nucleon. *Phys. Rev.*, 185:1975–1982, 1969.
- [BR83] R. Baier und R. Rückl. Hadronic collisions: A quarkonium factory. *Z. Phys.*, C19:251, 1983.
- [Bra96] E. Braaten. Introduction to the nrqcd factorization approach to heavy quarkonium. 1996.
- [BT81] W. Buchmüller und S. H. H. Tye. Quarkonia and quantum chromodynamics. *Phys. Rev.*, D24:132, 1981.
- [CC96] G. Camici und M. Ciafaloni. Non-abelian q anti- q contributions to small- x anomalous dimensions. *Phys. Lett.*, B386:341–349, 1996.
- [CCH90] S. Catani, M. Ciafaloni, und F. Hautmann. Gluon contributions to small x heavy flavor production. *Phys. Lett.*, B242:97, 1990.
- [CCH91a] S. Catani, M. Ciafaloni, und F. Hautmann. High-energy factorization and small x heavy flavor production. *Nucl. Phys.*, B366:135–188, 1991.
- [CCH91b] S. Catani, M. Ciafaloni, und F. Hautmann. High-energy factorization and small x heavy flavor production. *Nucl. Phys.*, B366:135–188, 1991.
- [CK96] Matteo Cacciari und Michael Kramer. Color-octet contributions to j/ψ photoproduction. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4128–4131, 1996.
- [CL96a] Peter Cho und Adam K. Leibovich. Color octet quarkonia production. *Phys. Rev.*, D53:150–162, 1996.
- [CL96b] Peter Cho und Adam K. Leibovich. Color-octet quarkonia production ii. *Phys. Rev.*, D53:6203–6217, 1996.
- [CWT95] Peter Cho, Mark B. Wise, und Sandip P. Trivedi. Gluon fragmentation into polarized charmonium. *Phys. Rev.*, D51:2039–2043, 1995.
- [EQ95] Estia J. Eichten und Chris Quigg. Quarkonium wave functions at the origin. *Phys. Rev.*, D52:1726–1728, 1995.

- [Fad] V.S. Fadin. BFKL news. *hep-ph/9807528*.
- [Fey] R.P. Feynman. Partons. In **Brown, L.M. (ed.), Selected papers of Richard Feynman*, Seiten 519–559.
- [FFFK98] V. S. Fadin, R. Fiore, A. Flachi, und M. I. Kotsky. Quark-antiquark contribution to the bfl kernel. *Phys. Lett.*, B422:287–293, 1998.
- [FL89] V. S. Fadin und L. N. Lipatov. High-energy production of gluons in a quasimultiregge kinematics. *JETP Lett.*, 49:352, 1989.
- [FL96] V. S. Fadin und L. N. Lipatov. Next-to-leading corrections to the bfl equation from the gluon and quark production. *Nucl. Phys.*, B477:767–808, 1996.
- [FR] J. R. Forshaw und D. A. Ross. Quantum chromodynamics and the pomeron. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1997) 248 p. (Cambridge lecture notes in physics. 9).
- [G⁺00] D. E. Groom et al. Review of particle physics. *Eur. Phys. J.*, C15, 2000.
- [GKPR80] B. Guberina, J. H. Kuhn, R. D. Peccei, und R. Ruckl. Rare decays of the z_0 . *Nucl. Phys.*, B174:317, 1980.
- [GRV95] M. Glück, E. Reya, und A. Vogt. Dynamical parton distributions of the proton and small x physics. *Z. Phys.*, C67:433–448, 1995.
- [GRV98] M. Glück, E. Reya, und A. Vogt. Dynamical parton distributions revisited. *Eur. Phys. J.*, C5:461–470, 1998.
- [Hal68] L. M. Halliday, I. G. und Saunders. The unitarity equation at high energy. *Nuov.Cim.*, A60:115, 1968.
- [Har] A. Harindranath. An introduction to light-front dynamics for pedestrians. *hep-ph/9612244*.
- [HKS⁺00] Ph. Hägler, Roland Kirschner, Andreas Schäfer, Lech Szymanowski, und Oleg Teryaev. Heavy quark production as sensitive test for an improved description of high-energy hadron collisions. *Phys. Rev.*, D62:071502, 2000.
- [HKS⁺01a] Ph. Hägler, R. Kirschner, A. Schäfer, L. Szymanowski, und O. V. Teryaev. Direct j/ψ hadroproduction in $k(t)$ -factorization and the color octet mechanism. *Phys. Rev.*, D63:077501, 2001.
- [HKS⁺01b] Ph. Hägler, R. Kirschner, A. Schäfer, L. Szymanowski, und O. V. Teryaev. Towards a solution of the charmonium production controversy: $k(t)$ factorization versus color octet mechanism. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1446–1449, 2001.

- [JK99] R. L. Jaffe und D. Kharzeev. χ_2 production in polarized p p collisions at rhic: Measuring $\Delta(g)$ and testing the color octet model. *Phys. Lett.*, B455:306–310, 1999.
- [JL93] Matthias Jamin und Markus E. Lautenbacher. Tracer: Version 1.1: A mathematica package for gamma algebra in arbitrary dimensions. *Comput. Phys. Commun.*, 74:265–288, 1993.
- [JTH96] Xiang-Dong Ji, Jian Tang, und Pervez Hoodbhoy. The spin structure of the nucleon in the asymptotic limit. *Phys. Rev. Lett.*, 76:740–743, 1996.
- [KL00] Bernd A. Kniehl und Jungil Lee. Polarized j/psi from χ/cj and ψ' decays at the tevatron. *Phys. Rev.*, D62:114027, 2000.
- [KLF76] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, und V. S. Fadin. Multi - reggeon processes in the yang-mills theory. *Sov. Phys. JETP*, 44:443–450, 1976.
- [KLF77] E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, und V. S. Fadin. The pomeron singularity in nonabelian gauge theories. *Sov. Phys. JETP*, 45:199–204, 1977.
- [KMS91] J. Kwiecinski, A. D. Martin, und P. J. Sutton. Qcd predictions for the behavior of the gluon distribution at small x. *Phys. Rev.*, D44:2640–2652, 1991.
- [KMS97] J. Kwiecinski, A. D. Martin, und A. M. Stasto. A unified bfl and glap description of f2 data. *Phys. Rev.*, D56:3991–4006, 1997.
- [KS74] J. Kogut und Leonard Susskind. Scale invariant parton model. *Phys. Rev.*, D9:697–705, 1974.
- [Kwi85] J. Kwiecinski. The gluon distributions in the small x region beyond the leading order. *Z.Phys.*, C29, 1985.
- [L⁺95] H. L. Lai et al. Global qcd analysis and the cteq parton distributions. *Phys. Rev.*, D51:4763–4782, 1995.
- [Lep] G. Peter Lepage. Vegas: An adaptive multidimensional integration program.
- [Lev] Eugene Levin. The bfl high energy asymptotics in the next-to-leading approximation. *hep-ph/9806228*.
- [Lip88] L. N. Lipatov. Massless particle production in high-energy scattering of strings. *Sov. Phys. JETP*, 67:1975–1981, 1988.
- [LRSS91] E. M. Levin, M. G. Ryskin, Yu. M. Shabelski, und A. G. Shuvaev. Heavy quark production in parton model and in qcd. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 54:867–871, 1991.

- [LSZ00] A. V. Lipatov, V. A. Saleev, und N. P. Zotov. Heavy quark photoproduction in the semihard qcd approach and the unintegrated gluon distribution. *Mod. Phys. Lett.*, A15:1727–1738, 2000.
- [MR] A. D. Martin und M. G. Ryskin. Unintegrated generalised parton distributions. *hep-ph/0107149*.
- [MS86] T. Matsui und H. Satz. J / psi suppression by quark - gluon plasma formation. *Phys. Lett.*, B178:416, 1986.
- [Mue97] A. H. Mueller. Limitations on using the operator product expansion at small values of x. *Phys. Lett.*, B396:251–256, 1997.
- [Mut85] T. Muta. Foundations of quantum chromodynamics: An introduction to perturbative methods in gauge theories. *SINGAPORE: WORLD SCIENTIFIC*, 409 S., 1985.
- [N⁺] P. Nason et al. Bottom production. *hep-ph/0003142*.
- [RS94] M. G. Ryskin und Yu. M. Shabelski. The role of gluon-gluon shadowing in small x behavior of structure functions. *Z. Phys.*, C61:517–523, 1994.
- [RSS01] M. G. Ryskin, A. G. Shuvaev, und Yu. M. Shabelski. Charm hadroproduction in k(t) factorization approach. *Phys. Atom. Nucl.*, 64:120–131, 2001.
- [Sat01] Helmut Satz. The search for the qgp: A critical appraisal. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 94:204–218, 2001.
- [Sch82] John H. Schwarz. Superstring theory. *Phys. Rept.*, 89:223–322, 1982.
- [Sha] Y.M. Shabelski. The role of incident parton transverse momenta in heavy quark hadroproduction. *hep-ph/9904492*.
- [SMS98] K. Sridhar, A. D. Martin, und W. J. Stirling. J/psi production at the tevatron and hera: The effect of k(t) smearing. *Phys. Lett.*, B438:211–216, 1998.
- [SS01] Yu. M. Shabelski und A. G. Shuvaev. Heavy quark hadroproduction in k(t)-factorization approach and the experimental data. 2001.
- [Sud56] V.V. Sudakov. Vertex parts at very high-energies in quantum electrodynamics. *Sov.Phys. JETP*, 3:65, 1956.
- [YC01a] Feng Yuan und Kuang-Ta Chao. chi/cj polarizations at the fermilab tevatron. *Phys. Lett.*, B500:99–104, 2001.
- [YC01b] Feng Yuan und Kuang-Ta Chao. Color-singlet direct j/psi and psi' production at tevatron in the k(t) factorization approach. *Phys. Rev.*, D63:034006, 2001.

- [YC01c] Feng Yuan und Kuang-Ta Chao. Polarizations of j/ψ and ψ' in hadroproduction at tevatron in the $k(t)$ factorization approach. *Phys. Rev. Lett.*, 87:022002, 2001.

Danksagung

In erster Linie bedanke ich mich ganz besonders bei Herrn Prof. Dr. Andreas Schäfer für die Aufnahme an seinen Lehrstuhl, die hervorragende wissenschaftliche Anleitung und das spannende Thema meiner Dissertation.

Bei Herrn Prof. Dr. Lech Szymanowski bedanke ich mich ganz ausdrücklich für sein Engagement und die herzliche und nicht zuletzt erfolgreiche gemeinschaftliche Arbeit in den letzten Jahren.

Herrn Prof. Dr. O.V. Teryaev danke ich für die anregende, wertvolle und harmonische Zusammenarbeit.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Roland Kirschner für seine Kooperation und Diskussionsbereitschaft.

Herrn Dr. Eckart Stein danke ich für die freundliche und belebende Atmosphäre in unserem gemeinsamen Büro.

Mein Dank gilt allen Mitgliedern des Lehrstuhls, nicht zuletzt Frau Monika Maschek, für die freundliche Unterstützung und das angenehme Arbeitsklima. Meiner lieben Schwester und meinen Eltern danke ich für ihre Zuwendung und ihr Interesse an meiner Arbeit.

Der Studienstiftung danke ich für die unbürokratische und professionelle finanzielle und ideelle Förderung meiner Promotion.

Ganz besonders herzlich danke ich Herrn Dipl. Phys. Jan Dominik Gorsler für seine Unterstützung in jeglicher Hinsicht.