

Kohomologie von Kurven und geometrische
Realisierung nilpotenter Gruppen

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR. RER. NAT.) DER
NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT I –
MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von

Jörg Zipperer

aus Nürnberg

2002

Promotionsgesuch eingereicht am: 10. Juli 2002

Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Uwe Jannsen

Prüfungsausschuß: Prof. Dr. Günter Tamme (Vorsitzender)
Prof. Dr. Uwe Jannsen (Erstgutachter)
Prof. Dr. Guido Kings (Zweitgutachter)
Prof. Dr. Wolfgang Hackenbroch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
Vorbemerkungen und Notation	10
Kapitel 1 Kohomologie von Kurven	13
1 Hasseprinzipien (HP)	13
1.1 HP für die Brauergruppe	13
1.2 HP mit der Kohomologie einer Kurve als Galoismodul	17
1.2.1 Kohomologie eigentlicher Kurven	18
1.3 HP für die Etalkohomologie	22
1.3.1 Kohomologie eigentlicher Kurven	22
1.3.2 Kohomologie offener Kurven	24
1.4 HP für die Etalkohomologie relativer Kurven	29
1.4.1 HP für eigentliche Modelle	29
1.4.2 HP für reguläre Modelle	31
2 Ein Grunwald-Wang-Satz	33
2.1 Blochpunkte	33
2.2 Ein Grunwald-Wang-Satz	37
Kapitel 2 Realisierung nilpotenter Gruppen	41
3 Scholzüberlagerungen	41
3.1 Scholzdivisoren	41
3.2 Galoisüberlagerungen	42
3.3 Scholzüberlagerungen	53
4 Einbettungsprobleme	57
4.1 Definition	57
4.2 Lösungskriterien	58
4.3 Scholzprobleme	59
5 Scholzprobleme über verschiedenen Grundkörpern	61
5.1 Scholzprobleme über endlichen Körpern	61
5.2 Scholzprobleme über lokalen Körpern	64
5.2.1 Archimedische Körper	64
5.2.2 K-Theorie und höherdimensionale Klassenkörpertheorie	65
5.2.3 Nicht-archimedische Körper	69

6 Nilpotente Gruppen als Galoisgruppen	73
6.1 Der Hauptsatz	73
6.2 Gute Divisoren	75
6.2.1 Existenz guter Divisoren	75
6.2.2 Realisierung abelscher Gruppen	79
6.3 Realisierbarkeit nilpotenter Gruppen	80
6.3.1 Exzellente Divisoren	80
6.3.2 Existenzfrage für exzellente Divisoren	83
6.4 Der Beweis von Satz 6.3.1	85
Literaturverzeichnis	91

Einleitung

Das inverse Galoisproblem hat seit seiner Formulierung durch D. Hilbert im Jahre 1892 nichts von seiner Faszination eingebüßt. Während Hilbert in seiner berühmten Arbeit [Hil92] das Problem für die symmetrischen, alternierenden und abelschen Gruppen löste, blieb es für andere Gruppen längere Zeit ungelöst. Erst Scholz/Reichardt (1936/37) [Rei37] (s.a. [Ser92], [GJ98], [MM99]) und dann später Šafarevič (1954) [Šaf54] konnten die Realisierbarkeit nilpotenter bzw. auflösbarer Gruppen über Zahlkörpern zeigen. Ab Anfang der 80er Jahre gelang es mittels der sogenannten Rigiditätsmethode, eine positive Antwort auch für eine ganze Reihe klassischer Gruppen, vor allem aber für nicht-abelsche einfache Gruppen zu erzielen (vgl. [MM99]). Im Gegensatz zu den Arbeiten von Scholz, Reichardt und Šafarevič, die algebraische Zahlentheorie und Klassenkörpertheorie benutzen, basieren die Realisierungen mittels der Rigiditätsmethode auf dem hilbertschen Irreduzibilitätssatz und Galoisdescent. Dabei realisiert man die Gruppe als reguläre Galoiserweiterung eines Funktionenkörpers über einem Zahlkörper und zeigt dann mittels des hilbertschen Irreduzibilitätssatz, daß die Gruppe auch eine Realisierung über dem Konstantenkörper besitzt. Dabei heißt eine Funktionenkörpererweiterung L/K regulär, falls der Konstantenkörper von K in L algebraisch abgeschlossen ist. Insofern sind also genau diejenigen Körpererweiterungen regulär, die keine Konstantenkörpererweiterung enthalten, also rein geometrischen Ursprungs sind. Die Rigiditätsmethode hat in ihrer Folge, zumal auch wegen der neuen geometrischen Aspekte, ein großes Interesse an der Frage nach der regulären Realisierbarkeit endlicher Gruppen, dem sog. regulären Umkehrproblem der Galoistheorie, geweckt. Der Kern dieses Verfahrens besteht darin, die Existenz eines Galoisdescentdatums (über einem Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper besitzt jede endliche Gruppe eine reguläre Realisierung) auf eine rein gruppentheoretische Bedingung zurückzuführen. Erstaunlicherweise läßt sich diese für nicht-abelsche einfache Gruppen relativ einfach nachprüfen, wohingegen sie für (nicht-abelsche) auflösbare Gruppen vollkommen unbekannt ist.

Von daher bildet das reguläre Umkehrproblem der Galoistheorie für auflösbare Gruppen ein unbekanntes, „weites Feld“. Das ist der Auslöser dafür, in dieser Arbeit die folgende optimistische Behauptung zu untersuchen:

Behauptung. *Bezeichne G eine endliche, nilpotente Gruppe ungerader Ordnung und X entweder eine eigentliche, glatte, geometrisch zusammenhängende Kurve über einem Zahlkörper oder eine eigentliche, glatte, geometrisch zusammenhängende Fläche über einem endlichen Körper \mathbb{F} mit $(\#G, (\#\mathbb{F} - 1)) = 1$. Dann existiert eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $Y \rightarrow X$ mit Automorphismengruppe G .*

Mittels des hilbertschen Irreduzibilitätssatz sieht man, daß die Behauptung den klassischen Satz von Scholz/Reichardt verallgemeinern würde. Da man vermutungsweise annimmt, daß jede galoissche Erweiterung eines Zahlkörpers mittels des hil-

bertschen Irreduzibilitätssatzes aus einer geometrischen Erweiterung entsteht, ist die Behauptung eventuell gar nicht zu optimistisch. Insbesondere da sie für abelsche Gruppen schon bekannt ist [MM99, CH. I §5.1]. Über den abelschen Fall hinausgehend hat J. Sonn gezeigt [Son94], daß man alle endlichen, nilpotenten Gruppen ungerader Ordnung über der maximalen nilpotenten Erweiterung von \mathbb{Q}^{ab} regulär realisieren kann. Da diese Körpererweiterung über \mathbb{Q} unendliche Galoisgruppe besitzt, läßt sich daraus über die Behauptung nichts folgern.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Theorie zu entwickeln, mit der man obige Behauptung beweisen kann. Dieses Ziel hat sich als aufwendiger als anfangs gedacht herausgestellt, so daß es letztendlich dem Autor nicht möglich war, obige Behauptung zu beweisen. Die Theorie ist aber so weit entworfen, um einen Beweis unter Hinzunahme einer technischen Annahme, deren Gültigkeit wir hier allerdings den Nachweis schuldig bleiben müssen, zu geben; es gilt nämlich

Hauptsatz. *Bezeichne S entweder das Spektrum des Ganzheitsrings eines Zahlkörpers oder eine glatte Kurve über einem endlichen Körper und gelte: für jede endliche Menge abgeschlossener Punkte von \mathbb{P}_S^1 , die in der Faser über einem geeigneten Punkt $v \in S$ liegen und eine geeignete endliche ℓ -reguläre Teilmenge $T \subset S$, gibt es einen über $S \setminus T$ fast etalen, v -exzellenten Divisor auf \mathbb{P}_S^1 mit $I(D) \subset T$, der diese Punkte enthält.*

Dann ist die Behauptung richtig.

Eine genauere Erklärung der Bedingung des Satzes, sowie des Begriffes exzellenter Divisor, findet sich in §6.3.1. Ferner enthält §6.3.2 eine Diskussion der Probleme beim Existenznachweis für exzellente Divisoren. Dabei gehen wir vor allen auf den Fall eines Divisors mit zwei Punkten ein und geben ganz konkrete Hinweise, wie sich in diesem Fall die Existenz eventuell zeigen läßt. Dieser Fall ist insofern interessant, da daraus die reguläre Realisierbarkeit der einfachsten nichtabelschen Gruppen folgen würde.

Neben dem Beweis des Hauptsatzes enthält die Arbeit Ergebnisse, die unabhängig von der hier gemachten Anwendung von Interesse sind; nämlich eine Verallgemeinerung der Hasse-Prinzipien und des Satzes von Grunwald-Wang aus der Galoiskohomologie globaler Körper auf die Etalkohomologie glatter Kurven über globalen Körpern. Genauer sei k ein globaler Körper und bezeichne k_v die Lokalisierung von k an einer Stelle v von k , dann gilt

Satz I. *Sei X/k eine eigentliche, glatte und geometrisch irreduzible Kurve mit Funktionenkörper K und $\ell \neq \text{ch}(K)$ eine Primzahl. Ferner bezeichne K_v den Funktionenkörper von $X_v := X \times_k k_v$ und J_X die Jacobische von X . Ist dann der Index $\gamma(X_v) = 1$ für alle Stellen v von k und gilt $\text{III}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell = 0$, so ist die Abbildung*

$$H^2(K, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}/\ell)$$

injektiv.

Unter stärkeren technischen Bedingungen ist es uns auch möglich, Aussagen über die Injektivität der entsprechenden Abbildung in der Etalkohomologie für offene Unterschemata $U \subset X$,

$$H^2(U, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(U_v, \mathbb{Z}/\ell),$$

zu machen. Wie schon in Satz I so hängt auch hier die Injektivität vom Verschwinden von $\mathrm{III}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell$ ab (cf. Korollar 1.3.12). Der Beweis all dieser und noch weiterer Aussagen finden sich in §1.

Kommen wir zur Verallgemeinerung des Satzes von Grunwald-Wang. Hierbei spielt der Begriff des *Blochpunktes*, der bereits in der höherdimensionalen Klassenkörpertheorie [Sai85] von großer Bedeutung ist, eine entscheidende Rolle. Wir zeigen

Satz II. *Sei k ein globaler Körper, X ein k -Schema mit einem rationalen Punkt und v ein schwacher ℓ -Blochpunkt für X . Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$H^1(X, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(X_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

surjektiv.

Dabei ist bekannt, daß jedes k -Schema nach einer endlichen Basiserweiterung $k' \rightarrow k$ einen Blochpunkt besitzt. Bemerkenswerterweise konnten wir zeigen, daß z.B. $\mathbb{P}_\mathbb{Q}^1$ abgeschlossene Unterschemata Δ besitzt, so daß $\mathbb{P}_\mathbb{Q}^1 \setminus \Delta$ bereits über \mathbb{Q} einen Blochpunkt besitzt. Als Anwendung dieser Tatsache geben wir einen konzeptionell neuen Beweis des folgenden

Satz III. *Die Behauptung ist richtig, falls G abelsch ist.*

Unser Beweis hat insbesondere den Vorteil, daß er auch in positiver Charakteristik gültig ist und für $X = \mathbb{P}^1$ eine genaue Kontrolle des Verzweigungsdivisors gestattet (cf. Satz 6.2.6).

Wir wollen nun die Idee für den Beweis des Hauptsatzes erläutern. Sie besteht im wesentlichen aus dem sukzessiven Lösen von Einbettungsproblemen. Um die sukzessive Lösbarkeit zu garantieren, führen wir spezielle Einbettungsprobleme, sog. Scholzprobleme, ein und greifen damit eine Idee auf, die bereits auf Scholz zurückgeht. Ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta)$ mit $\Delta \subset \mathbb{P}_k^1$ abgeschlossen ist ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \pi_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta) & & \\ & & & & \downarrow \rho & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

mit einer endlichen Gruppe E der Ordnung ℓ^n und Epimorphismen ρ und α , so daß sowohl ρ als auch die Gruppenerweiterung speziellen Bedingungen genügen (s. Def. 4.3.1). Eine Lösung diese Problems, eine sog. Scholzlösung, ist ein Epimorphismus

$\psi : \pi_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta) \rightarrow E$ mit $\alpha \circ \psi = \rho$, der den selben speziellen Bedingungen (Scholzbedingungen) wie ρ genügt. Nach Galoistheorie ist klar, daß ψ eine Galoisüberlagerung mit Automorphismengruppe E beschreibt.

Der folgende Satz stellt den technischen Kern im Beweis des obigen Hauptsatzes dar. Er garantiert die Existenz von Scholzlösungen für geeignete Scholzprobleme.

Satz IV. *Sei $\mathcal{S}(k, \Delta)$ ein ℓ^n -Scholzproblem mit Ausnahmemenge $T \supset T_\ell$, so daß ρ in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist. Ferner sei $v_0 \in (S \setminus T)_0$ ein ℓ -regulärer Punkt und $D = \{x_1, \dots, x_d\}$ ein v_0 -exzellenter Divisor mit den folgenden Eigenschaften:*

- a) $\Delta = \Delta_r = \{x_1, \dots, x_r\} \subset D$ mit $r < d$,
- b) D^c ist fast etal über $S \setminus T$ und $I(D) \subset T$,
- c) $\rho(\pi_1(x_i)) = 1$, für $r < i \leq d$; d.h. x_i ist in ρ voll zerlegt,
- d) das lokale Scholzproblem $\mathcal{S}(k_{v_0}, (\Delta \cup \{x_{r+1}\})_{v_0})$ besitzt eine ℓ^n -Scholzlösung ψ_{v_0} , die entlang der speziellen Faser unverzweigt ist und $\psi_{v_0}(\pi_1(x_{i,v_0})) = 1$ erfüllt für $r + 1 < i \leq d$; d.h. alle x_{i,v_0} sind in ψ_{v_0} voll zerlegt.

Dann besitzt das Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_{r+1}\})$ eine ℓ^n -Scholzlösung ψ , die in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist, lokal bei v_0 die gegebene Lösung ψ_{v_0} induziert und in der alle x_i für $r + 1 < i \leq d$ voll zerlegt sind.

Die im vorstehenden Satz auftretenden Begriffe sind zu technisch, um hier ihre Definition wiederzugeben. Sie finden sich alle in §4 und §6. Zur leichteren Orientierung des Lesers sei hier die Beweisstrategie für den vorstehenden Satz schon einmal angegeben. Der Beweis erfolgt in 5 Schritten:

1. Für eine Stelle v von k bezeichne k_v die Lokalisierung von k bei v und $\Delta_v = \Delta \otimes_k k_v$. Dann ist das durch $\pi_1(\mathbb{P}_{k_v}^1 \setminus \Delta_v) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta)$ induzierte Einbettungsproblem für $\pi_1(\mathbb{P}_{k_v}^1 \setminus \Delta_v)$ wieder ein Scholzproblem, das sog. lokale Scholzproblem $\mathcal{S}(k_v, \Delta_v)$ bei v .
2. Ist für alle Stellen $v \notin T$ das lokale Scholzproblem $\mathcal{S}(k_v, \Delta_v)$ lösbar, so auch $\mathcal{S}(k, \Delta)$.
3. Nach Wahl eines rationalen Punktes $x_0 \in \mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta$ ist für alle Stellen $v \notin T$ das induzierte lokale Scholzproblem $\mathcal{S}(k_v, (\Delta \cup \{x_0\})_v)$ lösbar. Insbesondere besitzt nach dem vorherigen Schritt das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ eine Lösung $\tilde{\psi}$.
4. Wir ändern $\tilde{\psi}$ zu einer Lösung $\hat{\psi}$ von $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ ab, die in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist.

- Wir ändern die durch $\hat{\psi}$ induzierte Lösung von $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0, x'\})$ zu einer Scholzlösung, die die Bedingungen des Satzes erfüllt und über $\pi_1(X \setminus (\Delta \cup \{x'\}))$ faktorisiert, ab.

Die Ausführung dieser Strategie findet sich in §6.4. Insbesondere vereinigt §6 den gesamten Beweis des Hauptsatzes. Dabei wird die in den Paragraphen §1 bis §5 entwickelte Theorie benutzt. Da diese häufig mehr enthalten als später gebraucht wird, sei der Leser ermutigt, seine Lektüre mit §6 zu beginnen. Der Inhalt der übrigen Abschnitte ist im einzelnen wie folgt. In §1 werden im Detail Hasseprinzipien studiert. Er enthält insbesondere den Beweis von Schritt 2 der obigen Beweisstrategie. §2 studiert Blochpunkte, sowie einen Grunwald-Wang-Satz. Dieser spielt auch beim Beweis des Hauptsatzes eine wichtige Rolle. Diese Punkte betrachten wir in §2.1 auch für nicht-eigentliche Schemata und studieren ihre Beziehung zur Theorie der Spezialisierungsabbildung. Es ist eine Besonderheit von \mathbb{P}_k^1 , daß dieser schon über k Blochpunkte besitzt. In §3 definieren wir den Begriff der Galois- und der Scholzüberlagerung und untersuchen die Verträglichkeit letzterer mit Basiswechsel. Die Wiederholung einiger allgemeiner Tatsachen über Einbettungsprobleme und die Einführung des Begriffs des Scholzproblems obliegt §4. Schließlich gibt §5 eine Verallgemeinerung der klassischen Theorie für Scholzprobleme über endlichen Körpern auf solche über lokalen Körpern, wo unter anderem die höherdimensionale Klassenkörpertheorie von K. Kato und S. Saito für Kurven über lokalen Körpern als neues Element hinzukommt. Zu diesem Zweck geben wir eine geeignete Darstellung der klassischen Theorie.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Uwe Jannsen für die Möglichkeit, dieses Projekt zu realisieren, die vielen inspirierenden Gespräche und kritischen Kommentare. Ferner gilt mein Dank Prof. Dr. Guido Kings für viele hilfreiche Bemerkungen.

Die Erstellung der Arbeit wurde durch ein Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes unterstützt.

Vorbemerkungen und Notation

Während der gesamten Arbeit halten wir uns, wenn nichts anderes gesagt wird, an die folgenden Konventionen.

Es bezeichne immer k einen globalen Körper der Charakteristik $p = \text{ch}(k)$; d.h. einen Zahlkörper, falls $p = 0$, oder einen Funktionenkörper in einer Variable über einem endlichen Körper, falls $p > 0$. Die Menge der Primstellen von k bekommt das Symbol $\mathbb{P}(k)$. Diese ist disjunkte Vereinigung der archimedischen Stellen Σ_∞ und der nichtarchimedischen Stellen Σ_{fin} von k . Sei nun K ein beliebiger Körper. Dann bezeichne \overline{K} einen algebraischen Abschluß von K und G_K bzw. $G(K)$ die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ von K .

Sei $\Sigma \subseteq \mathbb{P}(k)$ eine Stellenmenge. Bezeichne k_Σ die maximale außerhalb von Σ unverzweigte Erweiterung von k , und sei $G_\Sigma(k) := \text{Gal}(k_\Sigma/k)$. Wir definieren für einen endlichen $G_\Sigma(k)$ -Modul M , eine Stellenmenge $T \subset \Sigma$ und für alle ganzen Zahlen i die Gruppen $\text{III}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M)$ und $\text{ck}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M)$ so, daß die folgende Sequenz

$$0 \rightarrow \text{III}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M) \rightarrow H^i(k_\Sigma/k, M) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^i(k_v, M) \rightarrow \text{ck}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M) \rightarrow 0$$

exakt ist. Ist T leer, so schreiben wir auch einfach nur $\text{III}^i(k_\Sigma, M)$. Bezeichnet Σ die Menge aller Stellen, so schreiben wir $\text{III}^i(k, \Sigma \setminus T, M)$.

Für einen Modul M bezeichne $M^\vee := \text{Hom}(M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ das Pontrjagin-Dual von M . Ferner bezeichne $M^* := \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ das diskrete Pontrjagin-Dual.

Seien $X \rightarrow S$ und $S' \rightarrow S$ Schemamorphismen. Dann bezeichnet $X_{(S')} \rightarrow S'$ den Basiswechsel von X mit S' . Ist X ein k -Schema, so schreiben wir \overline{X} anstelle von $X_{(\text{Spec } \overline{k})}$ und X_v anstelle von $X_{(\text{Spec } k_v)}$, wo k_v die Komplettierung von k an einer Stelle v bedeutet. Die Menge der i -dimensionalen Punkte bezeichnen wir mit $X_i := \{x \in X; \dim \overline{\{x\}} = i\}$, den Restklassenkörper von $x \in X$ mit $\kappa(x)$. Wir nennen X eine Kurve, falls X integer und von Dimension 1 ist.

Wir schreiben meist Λ für die konstante (etale) Garbe \mathbb{Z}/n auf X . Ferner definieren wir für jede ganze Zahl i die Twists

$$\Lambda(i) = \mathbb{Z}/n(i) := \mu_n^{\otimes i},$$

wo μ_n die Garbe der n -ten Einheitswurzeln ist. Für eine Garbe \mathcal{F} von \mathbb{Z}/n -Moduln bzw. einen \mathbb{Z}/n -Galoismodul M setzen wir dann

$$\mathcal{F}(i) := \mathcal{F} \otimes_\Lambda \Lambda(i) \quad \text{bzw.} \quad M(i) := M \otimes_{\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}/n(i).$$

Für ein k -Schema X haben wir dann den kanonischen Isomorphismus von G_k -Moduln

$$H^j(\overline{X}, \Lambda(i)) \simeq H^j(\overline{X}, \Lambda)(i).$$

Sei X ein integres, noethersches Schema. Eine (eventuell verzweigte) *Überlagerung* von X ist ein surjektiver, endlicher Morphismus $f : Y \rightarrow X$, der generisch etal ist.

Dabei heißt ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ *generisch etal*, falls f in den generischen Punkten von Y etal ist. Ist f sogar etal, so sprechen wir von f als einer *etalen Überlagerung* von X . Eine Überlagerung $f : Y \rightarrow X$ heißt *galoissch* mit Gruppe G , falls es einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$ gibt, durch den G einfach transitiv auf einer generischen, geometrischen Faser von f operiert (vgl. a. §3.2 für eine alternative Definition). Abkürzend sagen wir in diesem Fall auch, daß f eine *G -Überlagerung* ist. Ist G genauer eine ℓ -Gruppe, ℓ prim, so sprechen wir auch einfach von f als einer *ℓ -Überlagerung*.

Ist G ein kommutatives Gruppenschema über k , so schreiben wir $H^i(k, G)$ für $H^i(k, G(\bar{k}))$. Da G kommutativ ist, ist G darstellendes Objekt für eine abelsche, etale Garbe G_k auf $\text{Spec}(k)_{\text{ét}}$, und wir können $H^i(k, G)$ als Kurzschreibweise für $H_{\text{ét}}^i(\text{Spec } k, G_k)$ auffassen. Sei v eine Stelle von k und $\bar{k} \hookrightarrow \bar{k}_v$ die durch eine feste Fortsetzung von v auf \bar{k} definierte Einbettung. Unter der Lokalisierungsabbildung verstehen wir die Komposition

$$H^i(k, G) = H^i(k, G(\bar{k})) \rightarrow H^i(k_v, G(\bar{k})) \rightarrow H^i(k_v, G(\bar{k}_v)) = H^i(k_v, G).$$

Ferner liefert jede exakte Sequenz kommutativer Gruppenschemata

$$0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0,$$

die lokal von endlichem Typ über k sind, eine exakte Sequenz von G_k -Moduln

$$0 \rightarrow G_1(\bar{k}) \rightarrow G_2(\bar{k}) \rightarrow G_3(\bar{k}) \rightarrow 0,$$

und somit – in mit der Bezeichnung konsistenter Weise – eine lange Kohomologiesequenz

$$\cdots \rightarrow H^i(k, G_1) \rightarrow H^i(k, G_2) \rightarrow H^i(k, G_3) \rightarrow \cdots .$$

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist im folgenden die betrachtete Kohomologie immer die Etalkohomologie.

Kapitel 1: Kohomologie von Kurven

1 Hasseprinzipien (HP)

1.1 HP für die Brauergruppe

Sei k ein globaler Körper. Die Existenz von (kohomologischen) Hasseprinzipien für k ist klassischer Bestandteil der Zahlentheorie. Prominentestes Beispiel ist vermutlich der Satz von Hasse-Brauer-Noether, wonach die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Br}(k) \rightarrow \bigoplus_v \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

exakt ist.

Sei nun X eine Kurve über k mit Funktionenkörper K . Ausgangspunkt für dieses Kapitel ist die Frage, ob diese klassischen Sätze auch für die Kohomologie von X bzw. K gelten. Wir werden zunächst zeigen, daß die Injektion in (1.1) ein 2-dimensionales Analogon besitzt.

Für ein Schema X setzen wir $\text{Br}(X) := H^2(X, \mathbb{G}_m)$ und nennen es die Brauergruppe von X .

Definition 1.1.1. Sei X eine Kurve über einem beliebigen Körper F . Wir definieren den *Index* $\gamma(X)$ von X als den größten gemeinsamen Teiler derjenigen Körpergrade $[F' : F]$, so daß X einen F' -rationalen Punkt besitzt.

Trotz des Notationsmißbrauchs schreiben wir für eine Menge von abgeschlossenen Punkten oder ein abgeschlossenes Unterschema Δ von X auch $\gamma(\Delta)$ für $\text{ggT}\{\kappa(x) : k; x \in \Delta_0\}$. Der Begriff des Index gestattet es häufig, die Bedingung, daß X einen rationalen Punkt besitzt, durch die schwächere Bedingung $\gamma(X) = 1$ zu ersetzen; so gilt z.B.

Lemma 1.1.2. Sei $f : X \rightarrow \text{Spec } F$ eine Kurve mit Index 1. Dann ist für jede lokalkonstante, abelsche (etale) Garbe \mathcal{F} auf X die kanonische Abbildung

$$H^2(F, f_*\mathcal{F}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F})$$

injektiv.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Menge Δ von abgeschlossenen Punkten von X mit $\gamma(\Delta) = 1$. Die Aussage ist klar, falls X einen k -rationalen Punkt besitzt.

Andernfalls betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^2(F, f_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{F}) \\
\downarrow r & & \downarrow \\
\bigoplus_{x \in \Delta} H^2(\kappa(x), f_*^{(x)}\mathcal{F}) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \Delta} H^2(X_{\kappa(x)}, \mathcal{F}).
\end{array}$$

Nach dem bereits Gesagten ist die untere horizontale Abbildung injektiv. Ferner wird der Kern von $H^2(F, f_*\mathcal{F}) \rightarrow H^2(\kappa(x), f_*^{(x)}\mathcal{F})$ durch $\deg(x) = [\kappa(x) : F]$ annulliert, also insbesondere der Kern von r durch $\gamma(\Delta)$ annulliert. Folglich ist r und damit auch die obere horizontale Abbildung injektiv. \square

Sei nun X eine eigentliche, glatte und geometrisch irreduzible Kurve über k , die der folgenden Bedingung

$$(*) \text{ f\u00fcr alle Stellen } v \text{ von } k \text{ sei } \gamma(X_v) = 1$$

gen\u00fcgt. Dann gilt

Proposition 1.1.3. *Bezeichne J_X die Jacobische von X . Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$\mathrm{Br}(X) \rightarrow \prod_v \mathrm{Br}(X_v)$$

injektiv, falls $\mathrm{III}^1(k, J_X) = 0$ gilt.

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden beiden Lemmata. Bezeichne dazu $\mathrm{III}(X)$ den Kern der Abbildung $\mathrm{Br}(X) \rightarrow \prod_v \mathrm{Br}(X_v)$.

Lemma 1.1.4. *Es gilt*

$$\mathrm{III}(X) \hookrightarrow \mathrm{III}^1(k, \mathrm{Pic}_{X/k}).$$

Beweis. Die Leray-Spektralsequenz f\u00fcr den Strukturmorphismus $f : X \rightarrow \mathrm{Spec} k$

$$E_2^{p,q} = H_{\acute{e}t}^p(k, R^q f_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow H_{\acute{e}t}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m)$$

degeneriert wegen $R^q f_* \mathbb{G}_m = 0$ f\u00fcr $q > 1$ [Gro68, III, Cor. 5.8] (Satz von Tsen), und liefert die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^1(k, f_* \mathbb{G}_m) &\rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(k, R^1 f_* \mathbb{G}_m) \rightarrow \\
&H^2(k, f_* \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(k, R^1 f_* \mathbb{G}_m) \rightarrow H^3(k, f_* \mathbb{G}_m).
\end{aligned}$$

Nach [BLR90, \S 8.1] existiert ein Isomorphismus etaler k -Garben

$$R^1 f_* \mathbb{G}_m \simeq \mathrm{Pic}_{X/k}.$$

Wegen $\gamma(X_v) = 1$ und Lemma 1.1.2 erhalten wir das folgende exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{III}(X) & \longrightarrow & \text{III}^1(k, \text{Pic}_{X/k}) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
\text{Br}(k) & \longrightarrow & \text{Br}(X) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}_{X/k}) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_v \text{Br}(k_v) & \longrightarrow & \bigoplus_v \text{Br}(X_v) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^1(k_v, \text{Pic}_{X_v/k_v})
\end{array}$$

Mit der Identität $\text{Pic}_{X/k}(k_v) = \text{Pic}_{X_v/k_v}(k_v)$ [BLR90, §8.1, Prop. 4] folgt dann die Behauptung. \square

Lemma 1.1.5. *Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{Z}$, so daß die Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/c \rightarrow \text{III}^1(k, J_X) \rightarrow \text{III}^1(k, \text{Pic}_{X/k}) \rightarrow 0$$

exakt ist. Genauer ist c gleich dem Index von X .

Beweis. Die Gradabbildung liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Pic}_{X/k}^\circ \rightarrow \text{Pic}_{X/k} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

welche ihrerseits die lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\text{Pic}_{X/k}^\circ(k) \rightarrow \text{Pic}_{X/k}(k) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H^1(k, \text{Pic}_{X/k}^\circ) \rightarrow H^1(k, \text{Pic}_{X/k}) \rightarrow H^1(k, \mathbb{Z})$$

impliziert. Wegen $H^1(k, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(G_k, \mathbb{Z}) = 0$ und $c_v = \gamma(X_v) = 1$ folgt die Behauptung aus dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/c & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}_{X/k}^\circ) & \longrightarrow & H^1(k, \text{Pic}_{X/k}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathbb{Z}/c_v & \longrightarrow & \bigoplus_v H^2(k_v, \text{Pic}_{X_v/k_v}^\circ) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^1(k_v, \text{Pic}_{X_v/k_v})
\end{array}$$

Man beachte, da X glatt und eigentlich ist, ist $\text{Pic}_{X/k}^\circ$ eine abelsche Varietät [BLR90, 9.2/3], die Jacobische J_X von X . \square

Als Analogon zu (1.1) erhalten wir

Satz 1.1.6. *Sei X/k eine eigentliche, glatte und geometrisch irreduzible Kurve mit Funktionskörper K der Charakteristik 0, die die Bedingung (*) erfüllt. K_v sei der Funktionskörper von X_v für $v \in \mathbb{P}(k)$. Gilt außerdem $\text{III}^1(k, J_X) = 0$, so ist*

$$0 \rightarrow \text{Br}(K) \rightarrow \prod_v \text{Br}(K_v)$$

exakt. Allgemeiner gilt die Aussage für alle ℓ -primären Komponenten für alle Primzahlen $\ell \neq \text{ch}(K)$.

Beweis. Sei $\iota : \text{Spec } K \rightarrow X$ die Einbettung des generischen Punktes von X . Die Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(X, R^q \iota_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}(K, \mathbb{G}_m)$$

liefert die exakte Sequenz [Gro68, III, Prop. 2.1]

$$0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(K, \mathbb{G}_m) \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} H^1(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Analog erhält man für alle $\iota_v : \text{Spec } K_v \rightarrow X_v$ entsprechende Sequenzen, die sich zu dem folgenden kommutativen Diagramm zusammensetzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(K, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \prod_{x \in X_0} H^1(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \prod_v H^2(X_v, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \prod_v H^2(K_v, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \prod_v \prod_{x' \in (X_v)_0} H^1(\kappa(x'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Dabei sind die senkrechten Pfeile jeweils die Restriktionsabbildungen. Die rechte vertikale Abbildung ist nach dem klassischen Hasse-Prinzip für globale Körper injektiv (es reicht die Aussage für \mathbb{Z}/n -Koeffizienten nachzuprüfen, da $H^1(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ Torsionsgruppe und $H^1(\kappa(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_n = H^1(\kappa(x), \mathbb{Z}/n)$), denn

$$\prod_v \prod_{x' \in \widetilde{(X_v)_0}} H^1(\kappa(x'), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \hookrightarrow \prod_{x \in X_0} \prod_{v \in \mathbb{P}(\kappa(x))} H^1(\kappa(x)_v, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

wobei $\widetilde{(X_v)_0}$ die Menge derjenigen abgeschlossenen Punkte von X_v bezeichnet, die unter $X_v \rightarrow X$ nicht auf den generischen Punkt abgebildet werden. Daher folgt die Behauptung aus Proposition 1.1.3. \square

Sei A eine abelsche Gruppe und n eine natürliche Zahl. Mit A_n bezeichnen wir die Torsionsuntergruppe von A der Elemente der Ordnung n . Ferner schreiben wir ζ_n für eine primitive n -te Einheitswurzel. Satz I beweisen wir nun in Form von

Korollar 1.1.7. *Unter den Bedingungen des Satzes gilt dann: ist $\ell \neq \text{ch}(K)$ eine Primzahl und $\text{III}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell = 0$, so ist die Abbildung*

$$H^2(K, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}/\ell)$$

injektiv.

Beweis. Setze $k' := k(\zeta_\ell)$ und K' der Funktionenkörper von $X' = X \otimes_k k'$. Wegen $\ell \nmid [K' : K]$ erhalten wir eine Injektion [NSW00, 1.5.7]

$$H^2(K, \mathbb{Z}/\ell) \xrightarrow{\text{res}} H^2(K', \mathbb{Z}/\ell) \simeq \text{Br}(K')_\ell.$$

Die Isomorphie mit der ℓ -Torsion der Brauergruppe ist eine Konsequenz aus Hilberts Satz 90. Analog bekommen wir Injektionen für K_v (bzw. K'_v) anstelle von K (bzw. K'). Wir erhalten daher das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(K, \mathbb{Z}/\ell) & \hookrightarrow & \text{Br}(K')_\ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}/\ell) & \hookrightarrow & \prod_v \text{Br}(K'_v)_\ell. \end{array}$$

Die Injektivität der linken vertikalen Abbildung folgt somit aus der der rechten. Nach Voraussetzung und Satz 1.1.6 ist diese injektiv. \square

Bemerkung 1.1.8. Nach der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung für abelsche Varietäten ist $\text{III}^1(k, J_X)$ endlich, so daß man in Satz 1.1.6 für fast alle ℓ eine Injektion auf den ℓ -primären Komponenten bekommt. Das ist für viele elliptische Kurven und einige höherdimensionale abelsche Varietäten schon bewiesen (Kolyvagin/Rubin). Für viele elliptische Kurven E/\mathbb{Q} gilt sogar $\text{III}^1(\mathbb{Q}, E) = 1$ [Cre97].

Ob ein Lokal-Global-Prinzip wie im vorstehenden Korollar auch für $H_{\text{ét}}^2(X, \mu_\ell)$ richtig ist, läßt sich aus Satz 1.1.6 leider nicht ableiten. Denn es gibt keine Beziehung zwischen $H_{\text{ét}}^2(X, \mu_\ell)$ und $\text{Br}(X)_\ell$ wie im Körperfall. Wir werden diese Frage nun für nicht notwendig eigentliches X studieren und sehen, daß die Existenz eines Lokal-Global-Prinzips für die Etalkohomologie von X weitere Bedingungen erfordert.

1.2 HP mit der Kohomologie einer Kurve als Galoismodul

Sei k ein globaler Körper und $\Sigma \subseteq \mathbb{P}(k)$ eine nichtleere Stellenmenge. Wir setzen für ein kommutatives Gruppenschema G über k und eine positive ganze Zahl n :

$$G(k, \Sigma, n) := \text{Kern}(G(k)/n \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} G(k_v)/n).$$

Ist G (über \bar{k}) n -divisibel, so liefert die Multiplikation mit n die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow G \xrightarrow{n} G \rightarrow 0.$$

Aufgefaßt als Sequenz von G_k -Galoismoduln liefert sie die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow G(k)/n \rightarrow H^1(k, G_n) \rightarrow H^1(k, G)_n \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

und somit für die Kerne unter der Restriktionsabbildung $(\text{res}_v)_{v \in \mathbb{P} \setminus T}$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow G(k, \mathbb{P} \setminus T, n) \rightarrow \text{III}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, G_n) \rightarrow \text{III}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, G)_n, \quad (1.3)$$

wo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(k)$ und $T \subset \mathbb{P}$.

1.2.1 Kohomologie eigentlicher Kurven

Sei nun X/k eine glatte, eigentliche, geometrisch irreduzible Kurve. Wir schreiben Λ für die konstante Garbe \mathbb{Z}/n auf $X_{\text{ét}}$, wobei wir n als auf X invertierbar annehmen. Aus der Kummersequenz erhält man den G_k -Isomorphismus

$$H^1(\overline{X}, \Lambda(1)) \simeq \text{Pic}(\overline{X})_n \simeq \text{Pic}^\circ(\overline{X})_n \simeq J_X(\overline{k})_n, \quad (1.4)$$

wo J_X die Jacobische von X bezeichnet (letztere ist wieder über k definiert). Nach [ST68] ist der G_k -Modul $H^1(\overline{X}, \Lambda(1))$ an all denjenigen Stellen von k unverzweigt¹⁾ an denen X gute Reduktion hat und die n nicht teilen. Bezeichne $\Sigma_{\text{bad}} = \Sigma_{\text{bad}}(X)$ die Menge der Stellen schlechter Reduktion von X und Σ_n die Menge der Teiler von n . Ferner sei $\Sigma_{\text{bad},n} = \Sigma_{\text{bad}} \cup \Sigma_n$. Somit ist $H^1(\overline{X}, \Lambda(1))$ genauer ein $G_\Sigma(k)$ -Modul für jede Stellenmenge Σ , die $\Sigma_{\text{bad},n}$ enthält.

Wir möchten

$$\mathbb{H}^1(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \simeq \mathbb{H}^1(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, J_{X,n})$$

studieren.

Da $J_{\overline{X}} = J_X \times_k \overline{k}$ divisibel ist, erhalten wir die Sequenzen (1.2) und (1.3) für $G = J_X$; d.h. wir haben die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow J_X(k, \mathbb{P} \setminus T, n) \rightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \rightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, J_X)_n. \quad (1.5)$$

Sei nun $\Sigma \subseteq \mathbb{P}$ beliebig mit $\Sigma_{\text{bad},n} \subset \Sigma$. Die Inflations-Restriktionssequenz zum Epimorphismus $G_k \rightarrow G_\Sigma(k)$ liefert für $T \subset \Sigma$ die Inklusion

$$\mathbb{H}^1(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus ((\mathbb{P} \setminus \Sigma) \cup T), H^1(\overline{X}, \Lambda(1))). \quad (1.6)$$

Somit können wir uns für unsere Frage auf das Studium von (1.5) beschränken. Wir nennen $\Sigma \subseteq \mathbb{P}$ *koendlich*, falls $\mathbb{P} \setminus \Sigma$ endlich ist.

Seien $T \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$ Teilmengen mit Dirichletdichte $\delta_k(\Sigma \setminus T) = 1$. Wir beschränken uns im folgenden auf Kurven die der Bedingung

$$(\dagger_n) \quad J_X(k, \Sigma \setminus T, n) = 0$$

genügen. Man kann zeigen, daß die Bedingung (\dagger_n) bereits aus der Bedingung (\dagger_ℓ) für alle Primzahlen $\ell|n$ folgt.

Es ist bekannt, daß jede eigentliche, glatte Kurve die Bedingung (\dagger_ℓ) für fast alle ℓ erfüllt.

Für einen $G_\Sigma(k)$ -Modul M setze

$$M' := \text{Hom}(M, \mathcal{O}_{k_\Sigma}^\times),$$

wo \mathcal{O}_{k_Σ} der Ganzheitsring von k_Σ ist.

¹⁾Ein G_k -Modul heißt *unverzweigt* an einer Stelle v von k , falls die absolute Trägheitsgruppe $I_v \hookrightarrow G_k$ von v auf M trivial operiert.

Lemma 1.2.1. *Sei M ein endlicher $G_\Sigma(k)$ -Modul und enthalte Σ die Teiler von $\#M$ und sei ansonsten beliebig. Für eine endliche Stellenmenge $T \subset \Sigma$ haben wir die kanonische exakte Sequenz ($0 \leq i \leq 2$)*

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^i(k_\Sigma, M) \rightarrow \mathbb{H}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M) \rightarrow ck^{2-i}(k_\Sigma, T, M')^* \rightarrow 0.$$

Beweis. Aus den lokalen und globalen Dualitätssätzen von Tate bzw. Tate-Poitou erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & \\
& & & & \uparrow & & \\
\mathbb{H}^i(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, M) & \longrightarrow & H^i(k_\Sigma/k, M) & \longrightarrow & \prod_{\Sigma \setminus T} H^i(k_v, M) & & \\
& \uparrow & \parallel & & \uparrow & & \\
\mathbb{H}^i(k_\Sigma, M) & \hookrightarrow & H^i(k_\Sigma/k, M) & \longrightarrow & \prod_{\Sigma} H^i(k_v, M) & \longrightarrow & H^{2-i}(k_\Sigma/k, M')^* \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \\
& & & & \prod_T H^i(k_v, M) & \longrightarrow & \prod_T H^{2-i}(k_v, M')^* \\
& & & & \uparrow & & \uparrow \\
& & & & 0 & & ck^{2-i}(k_\Sigma, T, M')^* \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 1.2.2. *Sei $\Sigma \supset \Sigma_{\text{bad}}(X)$ eine Stellenmenge von k mit Dirichletdichte $\delta_k(\Sigma) = 1$ (und $\Sigma \supset \Sigma_\infty$ im Zahlkörperfall), die die Teiler von $n \geq 3$ enthält. Dann ist für eine endliche Stellenmenge $T \subset \Sigma \setminus \Sigma_{\text{bad},n}$ der kanonische Homomorphismus*

$$H^1(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \rightarrow \prod_T H^1(k_v, H^1(\overline{X}, \Lambda(1)))$$

surjektiv.

Beweis. Bezeichne k' die minimale trivialisierende Erweiterung von $H^1(\overline{X}, \Lambda(1))$. Nach [ST68, §2 Cor. 2] ist k'/k an allen Stellen $v \in T$ unverzweigt. Da die Restklassenkörper von k endlich sind, bedeutet das, daß für alle $v \in T$ die Zerlegungsgruppen $D_v(k'/k)$ zyklisch sind. Andererseits gilt nach Poincaré-Dualität

$$\begin{aligned}
H^1(\overline{X}, \Lambda(1))' &\simeq H^1(\overline{X}, \Lambda(1))^*(1) \\
&\simeq H^1(\overline{X}, \Lambda)(1) \simeq H^1(\overline{X}, \Lambda(1))
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Somit läßt sich [NSW00, 9.2.2(vi)] anwenden und das zeigt die Behauptung. \square

Zusammenfassend erhalten wir

Proposition 1.2.3. *Sei $T \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(k)$ eine endliche Menge von Stellen an denen X gute Reduktion hat und die die Teiler von n nicht enthält und genüge X der Bedingung (\dagger_n) . Dann gilt*

$$\mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, J_X)_n.$$

Allgemeiner gilt für $\Sigma_{bad,n} \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$ koendlich und $T \subset \Sigma \setminus \Sigma_{bad,n}$ wie eben

$$\mathbb{H}^1(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, J_X)_n.$$

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten nach (1.6). Zum Beweis der ersten betrachte (1.5). Nach Voraussetzung gilt für alle $T \subset \Sigma$ endlich

$$\mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, J_X)_n.$$

Nach Wahl von T zeigt Proposition 1.2.2 zusammen mit (1.7)

$$\text{ck}^1(k, T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1)))' \simeq \text{ck}^1(k, T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) = 0$$

Daraus folgt mit Lemma 1.2.1

$$\mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \simeq \mathbb{H}^1(k, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, J_X)_n.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Im folgenden wird jetzt immer vorausgesetzt, daß X und T der Bedingung (\dagger_n) genügen. Dann folgt unmittelbar

Satz 1.2.4. *Seien $\Sigma_{bad,n} \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$, $T \subset \Sigma \setminus \Sigma_{bad,n}$ und $\Sigma \setminus T$ koendlich. Gilt dann $\mathbb{H}^1(k, J_X)_n = 0$, so ist*

$$H^1(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^1(k_v, H^1(\overline{X}, \Lambda(1)))$$

injektiv.

Korollar 1.2.5. *Seien Σ und T wie bisher und enthalte Σ zusätzlich noch die Teiler von $n = \ell$ prim. Gilt dann $\mathbb{H}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell = 0$, so ist*

$$H^1(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \Lambda)) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^1(k_v, H^1(\overline{X}, \Lambda))$$

injektiv.

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Injektivität der Restriktionsabbildungen in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \Lambda)) & \hookrightarrow & H^1(k_\Sigma/k(\zeta_n), H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\Sigma \setminus T} H^1(k_v, H^1(\overline{X}, \Lambda)) & \hookrightarrow & \prod_{\Sigma \setminus T} H^1(k(\zeta_n)_v, H^1(\overline{X}, \Lambda(1))) \end{array} \quad (1.8)$$

und Satz 1.2.4. \square

Korollar 1.2.6. *Seien Σ und T wie in Satz 1.2.4 und $\ell \neq \text{ch}(k)$ eine Primzahl. Falls $\text{III}^1(k, J_X)(\ell) = 0$ gilt, so ist*

(i) *die Restriktion*

$$H^1(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^1(k_v, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))) \quad (1.9)$$

injektiv,

(ii) *falls Σ zusätzlich die Teiler von ℓ enthält,*

$$H^2(k_\Sigma/k, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))) \rightarrow \bigoplus_{\Sigma} H^2(k_v, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))) \quad (1.10)$$

injektiv.

Beweis. (i) folgt sofort aus Satz 1.2.4 durch Übergang zum projektiven Limes. (ii) sieht man wie folgt ein. Es gilt

$$\text{III}^2(k_\Sigma, H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(1))) \simeq \varinjlim_n \text{III}^2(k_\Sigma, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n(1))).$$

Weiter gilt nach Tate-Poitou-Dualität und (1.7)

$$\begin{aligned} \text{III}^2(k_\Sigma, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n(1))) &\simeq \text{III}^1(k_\Sigma, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n(1)))'^* \\ &\simeq \text{III}^1(k_\Sigma, H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^n(1)))^*. \end{aligned}$$

Letztere Gruppe ist aber nach Proposition 1.2.3 gleich Null. \square

Bemerkung 1.2.7. Die Aussage des Korollars findet sich im Prinzip schon in [Jan89, §4 Thm. 3]. Dort wurde genauer gezeigt, daß der Kern der Restriktionsabbildung (1.9) endlich ist. Nach dem Korollar liegt dieser Kern in $\text{III}^1(k, J_X)$. Die berühmte Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung besagt insbesondere, daß diese Gruppe endlich ist. Somit bekommt man vermutungsweise das Jannsensche Resultat auch aus obigem Korollar. Die daraus resultierende Frage, ob $\text{III}^1(k, J_X)$ genau die Obstruktion gegen ein Hasse-Prinzip beschreibt, muß hier leider unbeantwortet bleiben. Das bisher gesagte trifft auch auf die Restriktionsabbildung (1.10) zu. Das Korollar stellt insofern eine geringfügige Verbesserung dar, daß hier eine Aussage über $G_\Sigma(k)$ -Moduln anstatt G_k -Moduln wie in loc. cit. gemacht wird.

1.3 HP für die Etalkohomologie

Sei X/k wieder eine Kurve und $f_v : X_v \rightarrow X$ der Basiswechselformorphismus für eine Stelle v von k . Für eine konstante etale Garbe \mathcal{F} auf X ist der Adjunktionsmorphimus $\mathcal{F} \rightarrow f_* f^* \mathcal{F}$ injektiv und $f^* \mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$ auf X_v . Folglich existieren Abbildungen

$$H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X, f_* f^* \mathcal{F}) \rightarrow H^i(X_v, f^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\simeq} H^i(X_v, \mathcal{F}),$$

wobei die mittlere Abbildung der Eckenmorphimus der Leray-Spektralsequenz zu f ist. Das Kompositum dieser Abbildungen nennen wir die (etale) Restriktionsabbildung zur Stelle v . (Für $X = \text{Spec } k$ erhält man die gewöhnliche Restriktionsabbildung der Galoiskohomologie.) Damit definieren wir nun für eine Stellenmenge $T \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(k)$ und ganze Zahlen $i \geq 0$ die Gruppen $\mathbb{H}_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{P} \setminus T, \mathcal{F})$ als Kern der Restriktionsabbildung

$$H_{\text{ét}}^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{v \notin T} H_{\text{ét}}^i(X_v, \mathcal{F})$$

Wie bisher schreiben wir einfach $\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F})$, falls $T = \emptyset$.

1.3.1 Kohomologie eigentlicher Kurven

Sei X/k eine glatte, eigentliche und geometrisch irreduzible Kurve. Für eine etale Garbe \mathcal{F} auf X hat man die Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H^q(\overline{X}, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}) \quad (1.11)$$

und insbesondere einen Eckenmorphimus

$$H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(k, H^q(\overline{X}, \mathcal{F})).$$

Der Kern dieses Homomorphismus sei mit $\tilde{H}^q(X, \mathcal{F})$ bezeichnet. Mit dieser Bezeichnung liefert (1.11) die exakte Sequenz

$$H^2(k, \Gamma(\overline{X}, \mathcal{F})) \rightarrow \tilde{H}^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathcal{F})) \rightarrow H^3(k, \Gamma(\overline{X}, \mathcal{F})). \quad (1.12)$$

Besitzt X einen k -rationalen Punkt, oder ist allgemeiner $\gamma(X) = 1$ bzw. ist \mathcal{F} eine endliche Garbe und $\gamma(X)$ teilerfremd zum Exponenten von \mathcal{F} , so impliziert (1.12) die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^2(k, \Gamma(\overline{X}, \mathcal{F})) \rightarrow \tilde{H}^2(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(k, H^1(\overline{X}, \mathcal{F})). \quad (1.13)$$

Für die Gruppen \tilde{H}^q sei der Kern unter der Restriktionsabbildung mit $\tilde{\mathbb{H}}^q$ bezeichnet. Wegen $\mathbb{H}^0(k, \mathbb{P} \setminus T, \cdot) = 0$ gilt

$$\tilde{\mathbb{H}}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{H}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \mathcal{F}). \quad (1.14)$$

Für eine positive, auf X invertierbare, ganze Zahl n bezeichne wieder Λ die konstante etale Garbe \mathbb{Z}/n .

Definition 1.3.1. Sei ℓ eine Primzahl. Eine Menge T von Stellen von k heißt ℓ -regulär, falls für alle $v \in T$ die Lokalisierung k_v keine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält. Für $v \nmid \ell$ ist das gleichbedeutend mit $\ell \nmid \#(\kappa(v)^\times)$.

Satz 1.3.2. Es seien $T \subset \mathbb{P} \setminus \Sigma_{\text{bad}, n}$ endlich und $\gamma(X_v) = 1$ für alle $v \notin T$ vorausgesetzt. Ferner genüge X der Bedingung (\dagger_n) . Dann gilt

(i) falls $\#T = 1$,

$$\mathbb{H}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(1)) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, J_X)_n,$$

(ii) falls $n = \ell$ prim und ungerade, $k \subsetneq k' := k(\zeta_\ell)$ und T ℓ -regulär,

$$\mathbb{H}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k', J_X)_\ell.$$

Beweis. Sei $j \in \{0, 1\}$. Wegen $\gamma(X_v) = 1$ haben wir für $\tilde{H}^2(X_v, \Lambda(j))$ eine kurze exakte Sequenz wie in (1.13). Daraus erhält man mittels Schlangenlemma die exakte Sequenz

$$\mathbb{H}^2(k, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(j)) \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(j)) \rightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\bar{X}, \Lambda(j))).$$

Daraus folgt die Behauptung, falls $\mathbb{H}^2(k, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(j)) = 0$ gilt. Denn setzen wir $k_0 := k'$ und $k_1 := k$, so erhalten wir

$$\tilde{\mathbb{H}}^2 \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k, \mathbb{P} \setminus T, H^1(\bar{X}, \Lambda(j))) \hookrightarrow \mathbb{H}^1(k_j, J_X)_n$$

nach Proposition 1.2.3 für $j = 1$ und (1.8) für $j = 0$, also die Behauptung.

Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz (Lemma 1.2.1)

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^2(k, \Lambda(j)) \rightarrow \mathbb{H}^2(k, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(j)) \rightarrow \text{ck}^0(k, T, \Lambda(1-j))^* \rightarrow 0.$$

Dann ist $\text{ck}^0(k, T, \Lambda(1-j)) = 0$. Für $j = 1$ ist das äquivalent zu $\#T = 1$. Im Fall $j = 0$ wird die Aussage trivial, weil wegen $k \neq k'$ und T ℓ -regulär alle beteiligten Kohomologiegruppen verschwinden.

Fehlt nur noch $\mathbb{H}^2(k, \Lambda(j)) = 0$. Das folgt aus [NSW00, 9.1.8(i)+(ii)], denn ℓ ist ungerade. Damit ist alles gezeigt. \square

Korollar 1.3.3. Unter den Bedingungen des Satzes sei ℓ eine ungerade Primzahl, $\zeta_\ell \notin k$ und T eine endliche, ℓ -reguläre Stellenmenge. Gilt außerdem $\mathbb{H}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell = 0$, so ist die Restriktionsabbildung

$$H^2(\pi_1(X), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(\pi_1(X_v), \mathbb{Z}/\ell)$$

injektiv.

Beweis. Aus der Hochschild-Serre-Spektralsequenz bekommt man die exakte Sequenz

$$H^1(\tilde{X}, \Lambda)^{\pi_1(X)} \rightarrow H^2(\pi_1(X), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow H^2(X, \Lambda), \quad (1.15)$$

wobei $H^1(\tilde{X}, \Lambda)$ die „erste Kohomologiegruppe der universellen Überlagerungsfläche von X “ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist nur als ein formaler Ausdruck anzusehen. Eigentlich stünde dort ein injektiver Limes von Kohomologiegruppen von endlichen Galoisüberlagerungen von X . Aber wie man es erwartet, verschwindet diese Gruppe. Demnach folgt die Aussage aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(\pi_1(X), \mathbb{Z}/\ell) & \hookrightarrow & H^2(X, \Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \notin T} H^2(\pi_1(X_v), \mathbb{Z}/\ell) & \hookrightarrow & \prod_{v \notin T} H^2(X_v, \Lambda) \end{array}$$

und Satz 1.3.2(ii). □

Bemerkung 1.3.4. Vorstehende Untersuchung läßt sich auch für $\mathbb{H}^i(X, \Lambda(j))$, i und j beliebig, durchführen. So gilt z.B. für $2 \nmid \#\Lambda$:

i=3: Läßt sich zurückführen auf das Studium von

$$\mathbb{H}^1(k, H^2(\bar{X}, \Lambda(j))) \simeq \mathbb{H}^1(k, \Lambda(j-1))$$

und

$$\mathbb{H}^2(k, H^1(\bar{X}, \Lambda(j))) \simeq \mathbb{H}^1(k, H^1(\bar{X}, \Lambda(2-j)))^\vee.$$

i=4: Der Fall ist besonders einfach, da

$$H^4(X, \Lambda(j)) \simeq H^2(k, H^2(\bar{X}, \Lambda(j)))$$

und also

$$\mathbb{H}^4(X, \Lambda(j)) \simeq \mathbb{H}^2(k, \Lambda(j-1)) \simeq \mathbb{H}^1(k, \Lambda(2-j))^\vee.$$

Letztere Gruppe ist für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$, ℓ prim, gleich Null [NSW00, 9.1.3(iv)].

Für $i \geq 5$ gilt $\mathbb{H}^i(X, \Lambda(j)) = 0$, denn $\text{cd}(X) = 4$.

1.3.2 Kohomologie offener Kurven

Sei X/k wie bisher eine glatte, eigentliche und geometrisch zusammenhängende Kurve und U ein offenes Unterschema. Wir wollen

$$\mathbb{H}^2(U, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(j))$$

studieren. Sei dazu $\Delta := X \setminus U$ mit Immersionen

$$U \xhookrightarrow{j} X \xleftarrow{i} \Delta.$$

Da \overline{U} affin, ist $\text{cd}(\overline{U}, \Lambda(j)) = 1$ [Mil80, VI Cor. 11.5]. Folglich degeneriert die Spektralsequenz (1.11) für U und liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz. Um damit eine Beschreibung von $\mathbb{H}^2(U)$ zu bekommen, müssen wir die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts auf nicht-eigentliche Kurven übertragen. Das kann man tun indem man die verallgemeinerte Jacobische studiert. Dies sei dem Leser überlassen. Stattdessen beweisen wir

Satz 1.3.5. *Für jede ganze Zahl j gilt*

$$H_{\Delta}^n(X, \Lambda(j)) \simeq \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^{n-2}(\kappa(x), \Lambda(j-1)).$$

Dabei bezeichne H_{Δ}^n die Kohomologie mit Träger in Δ .

Beweis. Die Gruppen $H_{\Delta}^n(X, \Lambda(j))$ werden durch die Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(\Delta, R^q i^! \Lambda(j)) \Rightarrow H_{\Delta}^{p+q}(X, \Lambda(j))$$

berechnet. Nach dem Reinheitssatz [SGA 4, XIX, Thm 3.2] bzw. [Mil80, VI §5] für X und Δ gilt $R^q i^! \Lambda(j) = 0$ für $q \neq 2$ und $R^2 i^! \Lambda(j) \simeq i^* \Lambda(j-1)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} H_{\Delta}^n(X, \Lambda(j)) &\simeq H^{n-2}(\Delta, R^2 i^! \Lambda(j)) \\ &\simeq \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^{n-2}(\text{Spec } \kappa(x), \Lambda(j-1)) \\ &\simeq \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^{n-2}(\kappa(x), \Lambda(j-1)). \end{aligned}$$

□

Damit liest sich die etale Lokalisierungssequenz wie folgt:

Korollar 1.3.6. *Die folgende Sequenz ist exakt:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X, \Lambda(j)) \rightarrow H^1(U, \Lambda(j)) \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} \Lambda(j-1)^{G_{\kappa(x)}} \rightarrow \\ \rightarrow H^2(X, \Lambda(j)) \rightarrow H^2(U, \Lambda(j)) \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^1(\kappa(x), \Lambda(j-1)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Insbesondere erhält man die folgende exakte Sequenz von G_k -Moduln

$$0 \rightarrow H^1(\overline{X}, \Lambda(j)) \rightarrow H^1(\overline{U}, \Lambda(j)) \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} \text{Ind}_{G_{\kappa(x)}}^{G_k} \Lambda(j-1) \rightarrow \Lambda(j-1) \rightarrow 0.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem Satz und der etalen Lokalisierungssequenz. Für die zweite Aussage wurde zusätzlich noch Tate-Dualität und $\text{cd}(\overline{U}, \Lambda(j)) = 1$ benutzt. □

Bezeichne C den Kokern der Abbildung $H^1(\overline{X}, \Lambda) \rightarrow H^1(\overline{U}, \Lambda)$ und sei $K := \text{Kern}(\pi_1^{\text{ab}}(\overline{U}) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(\overline{X}))$. Ist X vom Geschlecht g und $n = \#\overline{\Delta}_0$, dann haben wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ab}}(\overline{U}) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{ab}}(\overline{X}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}^n / \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}^n / \hat{\mathbb{Z}} \oplus \hat{\mathbb{Z}}^{2g} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}^{2g} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Folglich spaltet die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1^{\text{ab}}(\overline{X}), \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1^{\text{ab}}(\overline{U}), \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(K, \Lambda) \rightarrow 0,$$

und beweist damit die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\pi_1^{\text{ab}}(\overline{X}), \Lambda)^{G_k} \rightarrow \text{Hom}(\pi_1^{\text{ab}}(\overline{U}), \Lambda)^{G_k} \rightarrow \text{Hom}(K, \Lambda)^{G_k} \rightarrow 0.$$

Sei nun $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ und ℓ prim. Als G_k -Modul ist K isomorph zu $(\bigoplus_{\overline{x} \in \overline{\Delta}_0} \hat{\mathbb{Z}}(1)) / \hat{\mathbb{Z}}(1)$, also

$$\begin{aligned} \text{Hom}(K, \Lambda) &\simeq \left(\bigoplus_{\overline{x} \in \overline{\Delta}_0} \Lambda(-1) \right) / \Lambda(-1) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{x \in \Delta_0} \text{Ind}_{G_{\kappa(x)}}^{G_k} \Lambda(-1) \right) / \Lambda(-1) \simeq C \end{aligned} \tag{1.16}$$

ein Isomorphismus von G_k -Moduln (s.a. Korollar 1.3.6).

Lemma 1.3.7. Für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ mit ℓ prim und $\ell \nmid \gamma(\Delta)$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(\overline{X}, \Lambda)^{G_k} \rightarrow H^1(\overline{U}, \Lambda)^{G_k} \rightarrow \left(\bigoplus_{\overline{x} \in \overline{\Delta}_0} \Lambda(-1) \right)^{G_k} \rightarrow H^2(\overline{X}, \Lambda)^{G_k} \rightarrow 0.$$

Beweis. Nach dem bisher gesagten und Korollar 1.3.6 bleibt noch zu prüfen, ob

$$0 \rightarrow \text{Hom}(K, \Lambda)^{G_k} \rightarrow \left(\bigoplus_{\overline{x} \in \overline{\Delta}_0} \Lambda(-1) \right)^{G_k} \rightarrow H^2(\overline{X}, \Lambda)^{G_k} \simeq \Lambda(-1)^{G_k} \rightarrow 0$$

exakt ist. Unter Berücksichtigung von (1.16) und der Tatsache, daß alle Gruppen \mathbb{Z}/ℓ -Vektorräume sind, reicht es,

$$\text{Hom}(K, \Lambda)^{G_k} \xleftarrow{\simeq} \bigoplus_{x \in \Delta_0} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} / \Lambda(-1)^{G_k}$$

zu zeigen. Die Abbildung ist injektiv. Ihr Kokern ist gerade der Kern der Restriktionsabbildung

$$H^1(k, \Lambda(-1)) \rightarrow \prod_x H^1(\kappa(x), \Lambda(-1)),$$

welcher wegen $\ell \nmid \gamma(\Delta)$ gleich Null ist. □

Lemma 1.3.8. Für eine Primzahl ℓ mit $\ell \nmid \gamma(\Delta)$ und $\ell \nmid \gamma(U)$ ist

$$0 \rightarrow \tilde{H}^2(X, \Lambda) \rightarrow H^2(U, \Lambda) \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^1(\kappa(x), \Lambda(-1))$$

exakt.

Beweis. Betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(\bar{X}, \Lambda)^{G_k} & \longrightarrow & H^1(\bar{U}, \Lambda)^{G_k} & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{x \in \Delta_0} \Lambda(-1) \right)^{G_k} & \longrightarrow & H^2(\bar{X}, \Lambda)^{G_k} & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1(X, \Lambda) & \longrightarrow & H^1(U, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \Delta_0} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} & \xrightarrow{\beta} & H^2(X, \Lambda) & \longrightarrow & H^2(U, \Lambda) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
& & H^1(k, \Lambda) & \xlongequal{\quad} & H^1(k, \Lambda) & & & & \tilde{H}^2(X, \Lambda) & &
\end{array} \tag{1.17}$$

Die Exaktheit der Zeilen folgt aus Lemma 1.3.7 und Korollar 1.3.6, die der beiden linken Spalten aus Lemma 1.1.2 (denn wegen $\ell \nmid \gamma(\Delta)$ und $\ell \nmid \gamma(U)$ gilt auch $\ell \nmid \gamma(X)$). Die Behauptung des Lemmas ist äquivalent zu: im $\beta \simeq H^2(\bar{X}, \Lambda)^{G_k}$. Die Surjektivität ist sofort klar. Die Injektivität prüft man vermittels Diagrammjagd. \square

Bemerkung 1.3.9. Der Leser sei darauf hingewiesen, daß die Argumentation in diesem Abschnitt bisher unabhängig von der Wahl von k war.

Lemma 1.3.10. Seien X/k eine glatte, eigentliche und geometrisch irreduzible Kurve, $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ für eine Primzahl $\ell \neq 2$ und $T \subset \mathbb{P} \setminus \Sigma_{bad, \ell}$ eine endliche Stellenmenge. Gelte (\dagger_ℓ) . Sei $\Delta \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit $\ell \nmid \gamma(\Delta_v)$ und $\ell \nmid \gamma(U_v)$ für alle $v \in \mathbb{P} \setminus T$, wo man $U := X \setminus \Delta$ setzt, so erhält man einen Epimorphismus

$$\mathbb{H}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda) \rightarrow \mathbb{H}^2(U, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda).$$

Teilt ℓ auch keine der Größen $\gamma(\Delta)$ bzw. $\gamma(U)$, so erhalten wir sogar einen Isomorphismus.

Beweis. Mittels Korollar 1.3.6 und Lemma 1.3.8 bzw. Bemerkung 1.3.9 ist das nachstehende Diagramm kommutativ und besitzt exakte Zeilen und spalten.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \dashrightarrow & \tilde{\mathbb{H}}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda) & \longrightarrow & \mathbb{H}^2(U, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \Delta_0} \mathbb{H}^1(\kappa(x), \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(-1)) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \dashrightarrow & \tilde{H}^2(X, \Lambda) & \longrightarrow & H^2(U, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \Delta_0} H^1(\kappa(x), \Lambda(-1)) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_{v \notin T} \tilde{H}^2(X_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \notin T} H^2(U_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \notin T} \bigoplus_{y \in (\Delta_v)_0} H^1(\kappa(y), \Lambda(-1))
\end{array} \tag{1.18}$$

Die Exaktheit der mittleren Zeile folgt mittels Diagrammjagd aus (1.17), wo allerdings i.a. die oberste Zeile ganz rechts nicht exakt ist. Teilt ℓ nicht $\gamma(\Delta)$ und $\gamma(U)$, so gelten die gestrichelten Pfeile. Daraus folgt zusammen mit (1.14) die Behauptung des Satzes, falls

$$\mathbb{H}^1(\kappa(x), \mathbb{P} \setminus T, \Lambda(-1)) = 0$$

für alle $x \in \Delta_0$ gilt. Da $\Lambda(-1)$ ein einfacher G_k -Modul und T endlich ist, folgt das aus [NSW00, 9.1.3(iv)]. \square

Damit haben wir nun bewiesen:

Satz 1.3.11. *Seien X/k eine glatte, eigentliche und geometrisch zusammenhängende Kurve, die (\dagger_ℓ) erfüllt, $T \subset \mathbb{P} \setminus \Sigma_{\text{bad}, \ell}$ eine endliche Stellenmenge und Δ ein abgeschlossenes Unterschema von X . Setze $U = X \setminus \Delta$. Ferner sei $\ell \neq 2$ eine Primzahl mit $\ell \nmid \gamma(\Delta_v)$ und $\ell \nmid \gamma(U_v)$ für alle $v \notin T$, und gelte $\mathbb{H}^2(X, \mathbb{P} \setminus T, \Lambda) = 0$ für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$. Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$H^2(U, \Lambda) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(U_v, \Lambda)$$

injektiv.

Zusammen mit Satz 1.3.2 bekommen wir

Korollar 1.3.12. *Seien X , Δ und ℓ wie im Satz. Ferner enthalte k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel ζ_ℓ und T sei ℓ -regulär. Gilt dann $\mathbb{H}^1(k(\zeta_\ell), J_X)_\ell = 0$, so ist*

$$H^2(U, \Lambda) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(U_v, \Lambda)$$

injektiv.

Beweis. Wegen $\gamma(X_v) \mid \gamma(U_v)$ und $\ell \nmid \gamma(U_v)$ gilt auch $\ell \nmid \gamma(X_v)$ für alle $v \notin T$. Daher folgt die Behauptung aus Satz 1.3.11 und Satz 1.3.2 (man beachte, daß dort eigentlich nur $\ell \nmid \gamma(X_v)$ gebraucht wird). \square

Als wichtigen Spezialfall erhalten wir

Korollar 1.3.13. *Seien $\ell \neq 2$ eine Primzahl und k ein globaler Körper, der keine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält. Ferner sei Δ ein abgeschlossenes Unterschema von $X = \mathbb{P}_k^1$, das einen k -rationalen Punkt enthält, und T eine endliche, ℓ -reguläre Stellenmenge. Setze $U = X \setminus \Delta$. Dann ist*

$$H^2(U, \Lambda) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(U_v, \Lambda)$$

injektiv. Insbesondere ist auch $H^2(\pi_1(U), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \prod_{v \notin T} H^2(\pi_1(U_v), \mathbb{Z}/\ell)$ injektiv.

Beweis. Offensichtlich teilt ℓ keine der Größen $\gamma(\Delta)$, $\gamma(U)$ und $\gamma(\Delta_v)$, $\gamma(U_v)$ für $v \in \mathbb{P}$. Da trivialerweise auch noch (\dagger_ℓ) gilt, ist alles gezeigt.

Man beachte, wegen $\tilde{H}^2(\mathbb{P}_k^1, \Lambda) = H^2(k, \Lambda)$ bekommt (1.18) eine besonders einfache Gestalt, so daß man die Aussage des Korollar auch direkt aus diesem Diagramm ablesen kann. Insbesondere sieht man, daß T auch die Teiler von ℓ enthalten darf. \square

1.4 HP für die Etalkohomologie relativer Kurven

Bezeichne S_k ein Modell von k (s. §). Für ein offenes Unterschema $S \subset S_k$ bezeichne S° die Menge der Stellen von k die nicht Punkten aus S entsprechen.

Ziel dieses Paragraphen ist es, die Resultate aus §1.3 zu verallgemeinern indem wir auch beschränkte Verzweigung in der Basis zulassen.

1.4.1 HP für eigentliche Modelle

Sei X/k eine glatte, eigentliche und geometrisch irreduzible Kurve mit regulärem, eigentlichem Modell $\pi_{(S)} : \mathcal{X}_{(S)} \rightarrow S$ über $S \subset S_k$ offen. Für eine auf $\mathcal{X}_{(S)}$ invertierbare, positive, ganze Zahl n bezeichne Λ die konstante Garbe \mathbb{Z}/n auf $\mathcal{X}_{(S)}$. Die Leray-Spektralsequenz bzgl. $\pi_{(S)}$ mit Garbe Λ lautet:

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q \pi_{(S)*} \Lambda) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda). \quad (1.19)$$

Lemma 1.4.1. *Falls $\pi_{(S)}$ glatt ist, gilt*

$$H^p(S, R^q \pi_{(S)*} \Lambda) \simeq H^p(k_{S^\circ}/k, H^q(\overline{X}, \Lambda)).$$

Beweis. Nach dem Satz über den glatten und eigentlichen Basiswechsel [Mil80, VI §4] gilt für jeden geometrischen Punkt \bar{s} von S :

$$(R^q \pi_{(S)*} \Lambda)_{\bar{s}} \simeq H^q(\overline{X}, \Lambda).$$

Damit folgt die Behauptung aus [Mil86, II Prop. 2.9]. \square

Sei nun $S \subset S_k$ so gewählt, daß $\pi_{(S)}$ glatt ist. Mit Lemma 1.4.1 liefert (1.19) sodann die exakte Sequenz

$$H^2(k_{S^\circ}/k, \Lambda) \rightarrow \tilde{H}^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) \rightarrow H^1(k_{S^\circ}/k, H^1(\overline{X}, \Lambda)),$$

wo wir wieder

$$\tilde{H}^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) := \text{Kern}(H^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) \rightarrow \Gamma(S, R^2 \pi_{(S)*} \Lambda))$$

setzen. Diese Sequenz ist funktoriell in S und wir können folglich den direkten Limes bzgl. endlicher Teilmengen einer Stellenmenge $\Sigma_\infty \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$, die Σ_∞ enthalten, bilden. (Man beachte, daß jede endliche Teilmenge, die — im Zahlkörperfall — Σ_∞ enthält, von der Form S'° für ein offenes Unterschema $S' \subset S_k$ ist.) Genauer bilden wir den direkten Limes bzgl. endlicher Teilmengen von Σ , die

$$\Sigma_0 := \Sigma_\infty \cup \Sigma_{\text{bad}} \cup \Sigma_n \quad (1.20)$$

enthalten. Hierbei steht Σ_n für die Menge der Stellen, die n teilen. Somit erhalten wir die exakte Sequenz

$$H^2(k_\Sigma/k, \Lambda) \rightarrow \varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ} \tilde{H}^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) \rightarrow H^1(k_\Sigma/k, H^1(\bar{X}, \Lambda)) \quad (1.21)$$

Satz 1.4.2. *Seien $T \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$ Stellenmengen mit $\Sigma_0 \subset \Sigma$, $T \cap \Sigma_{bad} = \emptyset$ und $\Sigma \setminus T$ koendlich. Ferner sei $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ mit ℓ prim, $\ell \nmid \gamma(X_v)$ für alle $v \in \Sigma \setminus T$ und T ℓ -regulär. Außerdem enthalte T nicht die Teiler von ℓ und gelte (\dagger_ℓ) . Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$\varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} H^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^2(X_v, \Lambda)$$

injektiv, falls $\mathbb{H}^1(k(\zeta_n), J_X)_n = 0$ ist.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^2(k_\Sigma/k, \Lambda) & \longrightarrow & \varinjlim_{S^\circ} \tilde{H}^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) & \longrightarrow & H^1(k_\Sigma/k, H^1(\bar{X}, \Lambda)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_{v \in \Sigma \setminus T} H^2(k_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Sigma \setminus T} \tilde{H}^2(X_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Sigma \setminus T} H^1(k_v, H^1(\bar{X}, \Lambda)) \end{array}$$

Hierbei fassen wir für $v \in S^\circ$ die lokale Kurve X_v auf als den etalen Basiswechsel $\mathcal{X}_{(S)} \times_S \text{Spec } k_v$. Die Exaktheit der Zeilen ergibt sich aus (1.21) und (1.13). Zusammen mit (1.14) reicht es zu zeigen, daß $\mathbb{H}^2(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, \Lambda) = 0$ und $\mathbb{H}^1(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, H^1(\bar{X}, \Lambda)) = 0$ gilt. Letzteres wurde bereits in Korollar 1.2.5 gezeigt. Wegen der ℓ -Regularität von T ist $\text{ck}^0(k_\Sigma, T, \Lambda(1)) = 0$. Daraus folgt zusammen mit Lemma 1.2.1 und [NSW00, 9.1.8(i)]

$$\mathbb{H}^2(k_\Sigma, \Sigma \setminus T, \Lambda) = \mathbb{H}^2(k_\Sigma, \Lambda) = 0. \quad \square$$

Für $\Sigma_0 \subset \Sigma \subset \mathbb{P}(k)$ definieren wir

$$\pi_1^\Sigma(X) := \varprojlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} \pi_1(\mathcal{X}_{(S)}).$$

Dann klassifiziert $\pi_1^\Sigma(X)$ diejenigen etalen Überlagerungen von X , deren induzierte Überlagerung von $\mathcal{X}_{(S)}$ auch entlang von Fasern über Punkten, die nicht zu Stellen aus Σ gehören, etal ist. Satz 1.4.2 besagt dann, daß, unter den angegebenen Bedingungen, insbesondere

$$H^2(\pi_1^\Sigma(X), \Lambda) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^2(\pi_1(X_v), \Lambda)$$

injektiv ist; denn wir haben das kommutative Diagramm (vgl. (1.15))

$$\begin{array}{ccc} H^2(\pi_1^\Sigma(X), \Lambda) & \hookrightarrow & \varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} H^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} \\ \prod_{\Sigma \setminus T} H^2(\pi_1(X_v), \Lambda) & \hookrightarrow & \prod_{\Sigma \setminus T} H^2(X_v, \Lambda). \end{array}$$

1.4.2 HP für reguläre Modelle

Seien X/k und $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ wie in §1.4.1. Ein abgeschlossenes Unterschema \mathcal{D} heißt *horizontal*, falls die Komposition

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\pi} S$$

surjektiv ist. Entsprechend nennen wir einen Divisor auf \mathcal{X} *horizontal*, falls jede irreduzible Komponente ein horizontales Unterschema ist. Sei \mathcal{D} ein abgeschlossenes Unterschema von \mathcal{X} . Setzen wir $\mathcal{U} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$, $U = \mathcal{U} \otimes_{\mathcal{X}} k$ so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{i} & \mathcal{X} & \xleftarrow{j} & \mathcal{U} \\ & \searrow p & \downarrow & \swarrow q & \\ & & S & & \end{array}$$

mit abgeschlossenen (bzw. offenen) Immersionen i (bzw. j).

Als Analogon zu Satz 1.3.5 beweisen wir jetzt

Satz 1.4.3. *Sei \mathcal{X} regulär und \mathcal{D} ein reguläres, horizontales, abgeschlossenes Unterschema. Dann gilt für n invertierbar auf \mathcal{X} und alle ganzen Zahlen k und l :*

$$H_{\mathcal{D}}^k(\mathcal{X}, \Lambda(l)) \simeq \bigoplus_{x \in \mathcal{D}_1} H^{k-2}(G_{S_x}(\kappa(x)), \Lambda(l-1)).$$

Dabei bezeichnet $H_{\mathcal{D}}^k$ die Kohomologie mit Träger in \mathcal{D} und S_x die Menge der Stellen von $\kappa(x)$, die über S liegen.

Beweis. Wir betrachten die Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{D}, R^q i^! \Lambda(l)) \Rightarrow H_{\mathcal{D}}^{p+q}(\mathcal{X}, \Lambda(l)).$$

Da \mathcal{D} horizontal ist, ist \mathcal{D} in \mathcal{X} von der konstanten Kodimension 1 und somit gilt nach O. Gabbers [Gab] absolutem Reinheitssatz

$$R^2 i^! \Lambda(l) = \Lambda(l-1) \quad \text{und} \quad R^q i^! \Lambda(l) = 0 \quad \text{für } q \neq 2.$$

Daher degeneriert die Spektralsequenz und wir erhalten den folgenden Isomorphismus

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{D}}^n(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda(l)) &\simeq H^{n-2}(\mathcal{D}, \Lambda(l-1)) \\ &\simeq \bigoplus_{D \subset \mathcal{D} \text{ irred}} H^{n-2}(D, \Lambda(l-1)) \\ &\simeq \bigoplus_{x \in \mathcal{D}_1} H^{n-2}(\text{Spec } \mathcal{O}_{\kappa(x)} \times_{S_k} S, \Lambda(l-1)) \\ &\simeq \bigoplus_{x \in \mathcal{D}_1} H^{n-2}(G_{S_x}(\kappa(x)), \Lambda(l-1)). \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß \mathcal{D} als reguläres, horizontales Unterschema disjunkte Vereinigung von irreduziblen, abgeschlossenen, horizontalen Unterschemata ist. Letztere sind regulär und affin und stimmen daher über S mit dem Spektrum des Ganzheitsrings von $\kappa(x)$ überein. Der letzte Isomorphismus folgt aus [Mil86, II §2, Prop. 2.9]. \square

Wie in §1.3.2 schließen wir weiter:

Satz 1.4.4. *Sei \mathcal{D} wie bisher ein reguläres, abgeschlossenes Unterschema, $T \subset \Sigma \setminus \Sigma_{bad}$ eine Stellenmenge, so daß $\Sigma \setminus T$ koendlich ist. Für eine beliebige Stelle v von k setze $\Delta_v := \mathcal{D} \times_S \text{Spec } k_v$. Sei ferner $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$ für eine Primzahl $\ell \neq 2$, so daß T ℓ -regulär und ℓ keine der Größen $\gamma(\Delta_v)$ und $\gamma(U_v)$ für alle $v \in \Sigma \setminus T$ teilt. Gilt dann auch noch $\text{III}^1(k(\zeta_n), J_x)_n = 0$, so ist die Abbildung*

$$\varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} H^2(\mathcal{U}_{(S)}, \Lambda) \rightarrow \prod_{\Sigma \setminus T} H^2(U_v, \Lambda),$$

mit Σ_0 wie in (1.20), injektiv.

Beweis. Die etale Lokalisierungsabbildung liefert zusammen mit Satz 1.4.3 die Exaktheit der ersten Zeile des folgenden kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} \tilde{H}^2(\mathcal{X}_{(S)}, \Lambda) & \longrightarrow & \varinjlim_{\Sigma_0 \subset S^\circ \subset \Sigma} H^2(\mathcal{U}_{(S)}, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in \mathcal{D}_1} H^1(\kappa(x)_\Sigma / \kappa(x), \Lambda(-1)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{v \in \Sigma \setminus T} \tilde{H}^2(X_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Sigma \setminus T} H^2(U_v, \Lambda) & \longrightarrow & \prod_{v \in \Sigma \setminus T} \bigoplus_{y \in (\Delta_v)_0} H^1(\kappa(y), \Lambda(-1)) \end{array}$$

Nach Lemma 1.3.8 ist die untere Zeile exakt und die erste Abbildung injektiv. Folglich ist die Sequenz der Kerne exakt. Die linke senkrechte Abbildung ist injektiv nach Satz 1.4.2, denn $\ell \nmid \gamma(X_v)$, da $\gamma(X_v) | \gamma(\Delta_v)$ und $\ell \nmid \gamma(\Delta_v)$. Der Kern der rechten Abbildung ist gleich

$$\bigoplus_{x \in \mathcal{D}_1} \text{III}^1(\kappa(x)_\Sigma, \Sigma \setminus T, \Lambda(-1)).$$

Da $\Lambda(-1)$ einfach und $\Sigma \setminus T$ koendlich, ist $\text{III}^1(\kappa(x)_\Sigma, \Sigma \setminus T, \Lambda(-1)) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}_1$ zufolge [NSW00, 9.1.3(iv)]. \square

2 Ein Grunwald-Wang-Satz

2.1 Blochpunkte

Der Begriff des Blochpunkts wurde von S. Saito in [Sai85] eingeführt und ist von zentraler Bedeutung im Beweis der höherdimensionalen Klassenkörpertheorie. Im Gegensatz zu loc. cit. betrachten wir Blochpunkte auch für nicht-eigentliche Schemata; vgl. a. [Ras95].

Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ ein Schemamorphismus und \mathcal{F} eine etale Garbe auf \mathcal{X} . Für jeden Morphismus $p : S' \rightarrow S$ haben wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xleftarrow{p'} & \mathcal{X}' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{p} & S' \end{array}$$

mit $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_S S'$ und einen Morphismus

$$p^* R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f'_*(p'^* \mathcal{F}). \quad (2.1)$$

Wir sagen nun die Garbe $R^i f_* \mathcal{F}$ sei *mit beliebigem Basiswechsel verträglich*, falls die Abbildung (2.1) ein Isomorphismus ist.

Sei nun k ein globaler Körper mit regulärem Modell S_k und $S \subset S_k$ ein offenes Unterschema. Ferner sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ ein reguläres, eigentliches Modell einer glatten, eigentlichen und geometrisch zusammenhängenden Kurve X/k . Bezeichne \mathcal{U} das Komplement eines horizontalen Divisors \mathcal{D} auf \mathcal{X} in \mathcal{X} , U dessen generische Faser und $\pi = f|_{\mathcal{U}}$. Außerdem sei ℓ eine feste, auf S invertierbare, Primzahl. In dieser Situation gilt

Satz 2.1.1. *Es existiert ein dichtes, offenes Unterschema S' von S , so daß für alle $n \geq 0$ die etalen Garben $R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell$ auf S' lokal-konstant, konstruierbar und mit beliebigem Basiswechsel von S' verträglich sind.*

Beweis. [SGA 4 $\frac{1}{2}$; Th. finitude, Thm. 1.9] □

Bemerkung 2.1.2. Da die Bedingung (2.1) lokal für die etale Topologie und \mathcal{U} nach Voraussetzung separiert und quasi-kompakt ist, ist allgemeiner $R^n \pi_* \Lambda$ für jede lokal-konstante ℓ -Torsionsgarbe Λ auf S' mit beliebigem Basiswechsel verträglich. Es reicht, die Bedingung (2.1) in den Halmen nachzurechnen. Da es zu jedem geometrischen Punkt eine etale Umgebung gibt, die Λ trivialisiert, kann man $\Lambda = (\mathbb{Z}/\ell)^d$ für $d \geq 1$ annehmen. Da andererseits (2.1) mit direkten Summen verträglich ist, folgt die Aussage aus der für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell$.

Definition 2.1.3. Ein abgeschlossener Punkt $s \in S$ heißt *gewöhnlich* für U (bzw. \mathcal{U}), falls er eine Umgebung in S besitzt, für die die Aussage von Satz 2.1.1 gilt.

Wir bezeichnen im folgenden mit S' das maximale offene, dichte Unterschema von S , das die Aussage des Satzes erfüllt, d.h. der gewöhnlichen Punkte von S .

Korollar 2.1.4. *Für jede ganze Zahl $m \geq 1$ sind die etalen Garben $R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m$ für alle $n \geq 0$ auf S' lokal-konstant, konstruierbar und mit beliebigem Basiswechsel verträglich.*

Beweis. Sei $R^n = 0$ für $n < 0$. Dann ist für alle $n \geq 0$ die Sequenz

$$R^{n-1} \pi_* \mathbb{Z}/\ell^{m-1} \rightarrow R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell \rightarrow R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m \rightarrow R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^{m-1} \rightarrow R^{n+1} \pi_* \mathbb{Z}/\ell$$

exakt. Die Behauptung folgt nun durch Induktion über m aus Satz 2.1.1, da „lokal-konstant“ und „konstruierbar“ mit Erweiterung verträglich sind. Ferner bleibt obige Sequenz auch nach Anwendung von p^* exakt. Schreibt man darunter die basisgewechselte Sequenz, so zeigt das 5er-Lemma die Verträglichkeit mit beliebigem Basiswechsel. \square

Korollar 2.1.5. *Sei $\pi : \mathcal{U} \rightarrow S$ wie oben, bezeichne V_s die Faser über einem abgeschlossenen Punkt $s \in S_0$ und sei $U_s := U \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } k_s$ die Kurve über dem lokalen Körper k_s . Ist dann s ein gewöhnlicher Punkt von S , so ist die Spezialisierungsabbildung*

$$H^n(\overline{V}_s, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^n(\overline{U}_s, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

für alle $m \geq 1$ ein Isomorphismus. Insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus

$$H^n(\overline{V}_s, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^n(\overline{U}_s, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell).$$

Beweis. Nach Definition existiert eine Umgebung S_s von s , so daß für jeden geometrischen Punkt \bar{t} von S_s nach Korollar 2.1.4 gilt:

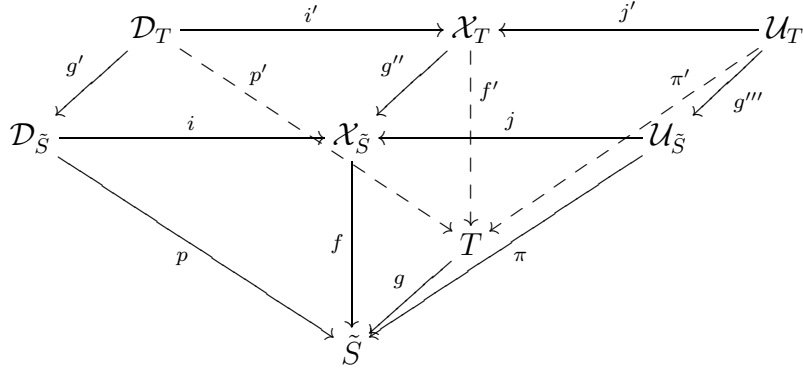
$$(R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m)_{\bar{t}} \simeq H^n(V_{\bar{t}}, \mathbb{Z}/\ell^m).$$

Da $R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m$ auf S konstruierbar ist, ist H^n unabhängig von der Wahl eines algebraischen Abschlusses, also insbesondere $H^n(\overline{U}, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq H^n(\overline{U}_s, \mathbb{Z}/\ell^m)$. Da $R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m$ außerdem lokal-konstant ist, gilt $(R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m)_{\bar{\eta}} \simeq (R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell^m)_{\bar{s}}$, wobei $\bar{\eta}$ einen geometrischen Punkt der über dem generischen Punkt von S_s liegt, bezeichnet. \square

Lemma 2.1.6. *Bezeichne \tilde{S} das maximale offene Unterschema von S , so daß $\mathcal{X} \times_S \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ glatt und $\mathcal{D} \times_S \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ etal ist. Dann gilt $\tilde{S} \subset S'$.*

Beweis. i) Wir zeigen zuerst, daß $R^n \pi_* \mathbb{Z}/\ell$ auf \tilde{S} mit beliebigem Basiswechsel verträglich ist. Dazu arbeiten wir in der Unterkategorie $D^+(Z, \mathbb{Z}/\ell)$ der derivierten Kategorie der \mathbb{Z}/ℓ -Modulgarben auf einem Schema Z , wo wir uns auf nach unten beschränkte Komplexe beschränken. Für jeden Basiswechsel $g : T \rightarrow S$ existiert das

folgende Diagramm



Bezeichne $R\pi_*$ bzw. $R\pi'_*$ die totalen Ableitungen von π_* bzw. π'_* . Dann reicht es, $g^*R\pi_*\mathbb{Z}/\ell \simeq R\pi'_*\mathbb{Z}/\ell$ zu zeigen. Wir schreiben wieder Λ für die konstante étale Garbe \mathbb{Z}/ℓ . Dann haben wir ein Dreieck

$$i_*Ri^!\Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow Rj_*j^*\Lambda \rightarrow i_*Ri^!\Lambda[1] \quad (2.2)$$

bzw. nach Anwendung von g^*Rf_* das exakte Dreieck

$$g^*Rp_*Ri^!\Lambda \rightarrow g^*Rf_*\Lambda \rightarrow g^*R\pi_*j^*\Lambda \rightarrow g^*Rp_*Ri^!\Lambda[1].$$

Zusammen mit dem analogen Dreieck für $g''^*\Lambda$ erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} g^*Rp_*Ri^!\Lambda & \longrightarrow & g^*Rf_*\Lambda & \longrightarrow & g^*R\pi_*\Lambda & \longrightarrow & g^*Rp_*Ri^!\Lambda[1] & \longrightarrow & g^*Rf_*\Lambda[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Rp'_*Ri^!g''^*\Lambda & \longrightarrow & Rf'_*g''^*\Lambda & \longrightarrow & R\pi'_*g''^*\Lambda & \longrightarrow & Rp'_*Ri^!g''^*\Lambda[1] & \longrightarrow & Rf'_*g''^*\Lambda[1]. \end{array}$$

Der zweite und letzte vertikale Pfeil sind Isomorphismen nach Basiswechsel für eigentliche Morphismen. Der erste vertikale Pfeil ist ebenfalls ein Isomorphismus. Denn nach Voraussetzung ist $p = f \circ i$ étal und also $Ri^!\Lambda \simeq \Lambda(-1)[-2]$ wegen kohomologischer Reinheit [SGA 4, XVI, Thm. 3.7]. Zusammen mit dem eigentlichen Basiswechsel für p erhalten wir schließlich

$$g^*Rf_*i_*Ri^!\Lambda \simeq g^*Rp_*\Lambda(-1)[-2] \simeq Rp'_*g'_*\Lambda(-1)[-2] \simeq Rp'_*Ri^!g''^*\Lambda \simeq Rf'_*i'_*Ri^!g''^*\Lambda.$$

Durch eine analoge Rechnung sieht man, daß auch der vierte Pfeil ein Isomorphismus ist. Anwendung des 5er-Lemma zeigt dann die gewünschte Isomorphie.

ii) Es bleibt noch zu zeigen, daß die $R^n\pi_*\mathbb{Z}/\ell$ auf \tilde{S} lokal-konstant und konstruierbar sind. Durch Anwendung von Rf_* auf (2.2) und kohomologischer Reinheit (s.o.) bekommen wir das exakte Dreieck

$$Rp_*\Lambda(-1)[-2] \rightarrow Rf_*\Lambda \rightarrow R\pi_*\Lambda \rightarrow Rp_*\Lambda(-1)[-1] \rightarrow Rf_*\Lambda[1].$$

Da „lokal-konstant“ und „konstruierbar“ mit Erweiterung verträglich und f und p glatt und eigentlich sind, folgt die Behauptung aus dem Satz vom glatten und eigentlichen Basiswechsel. \square

Wir kommen nun zu der wichtigen

Definition 2.1.7. Ein abgeschlossener Punkt $v \in S$ heißt ein *schwacher ℓ -Blochpunkt* für U , falls die natürliche Abbildung

$$H^1(\bar{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} \rightarrow H^1(\bar{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{k_v}}$$

ein Isomorphismus ist. Ein schwacher ℓ -Blochpunkt, der auch ein gewöhnlicher Punkt für U ist, heißt ein *ℓ -Blochpunkt* für U .

Für einen abgeschlossenen Punkt $v \in S$ bezeichne $V_v = U \otimes \kappa(v)$ die Reduktion von U bei v . Dann ist nach Korollar 2.1.5 die Existenz eines Isomorphismus

$$H^1(\bar{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} \simeq H^1(\bar{V}_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{\kappa(v)}},$$

bzw. dual dazu, die Existenz eines Isomorphismus

$$\pi_1^{\text{ab}}(\bar{U})(\ell)_{G_k} \simeq \pi_1^{\text{ab}}(\bar{V}_v)(\ell)_{G_{\kappa(v)}}$$

eine notwendige Bedingung dafür, daß v ein ℓ -Blochpunkt ist. Angesichts dieser Tatsache kommt einem die Existenz von ℓ -Blochpunkten wundersam vor. Es gilt jedoch

Lemma 2.1.8. (i) Sei $\ell \neq p = \text{ch}(k)$. Es gibt eine endliche Überlagerung $\tilde{S} \rightarrow S$, so daß \tilde{S} einen ℓ -Blochpunkt besitzt.

(ii) Habe S die Dimension 1 und besitzt S einen schwachen ℓ -Blochpunkt v , an dem die Operation von G_k auf $H^1(\bar{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ unverzweigt ist, so besitzt S schon unendlich viele schwache ℓ -Blochpunkte. Insbesondere besitzt S dann auch unendlich viele ℓ -Blochpunkte.

Beweis. (i) Siehe [Blo81].

(ii) Die erste Aussage ist in [Ras95, Lemma 6.30] bewiesen. Da S 1-dimensional ist, gibt es nach Satz 2.1.1 nur endlich viele Punkte in S , die nicht gewöhnlich sind. \square

Die nächste Proposition besagt, daß man für geeignete offene Unterschemata der projektiven Geraden in Lemma 2.1.8(i) sogar $\tilde{S} = S$ wählen kann; d.h. diese Schemata besitzen nicht erst nach Basiserweiterung einen Blochpunkt. Das ist von großer Bedeutung für die spätere Anwendung.

Proposition 2.1.9. Sei $U \subset X := \mathbb{P}_k^1$ ein offenes Unterschema, $\Delta = X \setminus U$ und $\ell \neq \text{ch}(k)$ eine Primzahl. Eine ℓ -reguläre Primstelle $v \nmid \ell$ von k ist genau dann ein schwacher ℓ -Blochpunkt, falls v den folgenden Bedingungen genügt:

(i) für alle $x \in \Delta_0$ ist v in der Erweiterung $\kappa(x)/k$ träge,

(ii) für alle $x \in \Delta_0$ ist $\mu_{\ell^\infty}(\kappa(x)) = \mu_{\ell^\infty}(\kappa(x)_v)$, wo μ_{ℓ^∞} die Vereinigung der Menge aller ℓ^m -ten Einheitswurzeln für $m \geq 1$, im jeweiligen Körper bezeichnet.

Beweis. Wegen $\pi_1(\overline{X}) = 1$ liefert Korollar 1.3.6 die exakte Sequenz von G_k -Moduln:

$$0 \rightarrow H^1(\overline{U}, \Lambda) \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} \text{Ind}_{G_{\kappa(x)}}^{G_k} \Lambda(-1) \rightarrow \Lambda(-1) \rightarrow 0,$$

für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n$, $n \geq 1$. Da k nach Voraussetzung keine primitive ℓ -te Einheitswurzel besitzt, erhalten wir

$$0 \rightarrow H^1(\overline{U}, \Lambda)^{G_k} \rightarrow \bigoplus_{x \in \Delta_0} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} \rightarrow \Lambda(-1)^{G_k} = 0, \quad (2.3)$$

und daraus

$$H^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} \simeq \bigoplus_{x \in \Delta_0} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1)^{G_{\kappa(x)}}.$$

Dabei operiert $G_{\kappa(x)}$ mittels des zyklotomischen Charakters. Sei $\Delta_v = \Delta \times_k k_v$. Eine analoge Argumentation wie eben liefert

$$H^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{k_v}} \simeq \bigoplus_{y \in (\Delta_v)_0} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1)^{G_{\kappa(y)}} \simeq \bigoplus_{x \in \Delta_0} \bigoplus_{w|v} \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(-1)^{G_{\kappa(x)w}},$$

wobei die zweite Summe über alle Fortsetzungen w von v läuft. Das zeigt, daß $H^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k}$ und $H^1(\overline{U}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{k_v}}$ genau dann isomorph sind, wenn die angegebenen Bedingungen gelten. \square

Wir sagen v sei ein schwacher Blochpunkt für ein abgeschlossenes Unterschema Δ von X , falls v ein schwacher Blochpunkt für $U = X \setminus \Delta$ ist.

Korollar 2.1.10. *Seien Δ_1 und Δ_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von X und v ein schwacher ℓ -Blochpunkt sowohl für Δ_1 als auch für Δ_2 . Dann ist v ein schwacher ℓ -Blochpunkt für $\Delta_1 \cup \Delta_2$.*

Beweis. Die Bedingungen aus Proposition 2.1.9 sind für alle Punkte aus Δ unabhängig voneinander. Daraus folgt sofort die Behauptung. \square

2.2 Ein Grunwald-Wang-Satz

Lemma 2.2.1. *Sei k ein Körper, X ein k -Schema und ℓ eine Primzahl. Die Sequenz*

$$0 \rightarrow \pi_1^{ab}(\overline{X})(\ell)_{G_k} \rightarrow \pi_1^{ab}(X)(\ell) \rightarrow G_k^{ab}(\ell) \rightarrow 0$$

ist in den folgenden Fällen exakt:

- a) X besitzt einen rationalen Punkt,
- b) k ist ein lokaler Körper,
- c) k ist ein globaler Körper.

Beweis. Die Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(k, H^q(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$$

liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} \xrightarrow{\alpha} H^2(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell).$$

Ist α die Nullabbildung, so bekommen wir eine kurze exakte Sequenz und die Behauptung folgt wegen

$$H^1(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \simeq \text{Hom}(\pi_1^{\text{ab}}(X)(\ell), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

durch Dualisieren. Wir zeigen nun, daß das unter den angegebenen Bedingungen der Fall ist. Das ist klar, falls X einen k -rationalen Punkt besitzt. In den beiden anderen Fällen gilt $H^2(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = 0$. Denn ist k ein lokaler Körper, so gilt nach lokaler Tate-Dualität

$$H^2(k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)' \simeq \varprojlim_n \mu_{\ell^n}(k) = 0,$$

da k nur endlich viele ℓ -te Einheitswurzeln besitzt. Die Aussage für k ein globaler Körper ist in [Ser77, 6.5, S. 232ff] bewiesen. \square

Proposition 2.2.2. *Sei k ein globaler Körper, X ein k -Schema mit einem rationalen Punkt und v ein schwacher ℓ -Blochpunkt für X . Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$H^1(X, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(X_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

surjektiv.

Beweis. Wie in Lemma 2.2.1 erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_k} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(k_v, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(X_v, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\overline{X}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_{k_v}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Andererseits liefert die Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}/\ell^m \rightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \rightarrow 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_k} & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_k} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_{k_v}} & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{k_v}} & \longrightarrow & H^1(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{G_{k_v}} \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die beiden rechten vertikalen Abbildungen sind nach Voraussetzung an v Isomorphismen und somit auch die linke (5er-Lemma). Zusammen mit

$H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq H^1(\overline{X}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$ (der generische Punkt von X ist nach Satz 2.1.1 immer gewöhnlich) erhalten wir also

$$H^1(\overline{X}, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_k} \simeq H^1(\overline{X}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_{k_v}}.$$

Daher bleibt nur noch zu zeigen, daß $H^1(k, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(k_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$ surjektiv ist. Das folgt aber aus dem Satz von Grunwald-Wang. \square

Korollar 2.2.3. *Seien $U \subset \mathbb{P}_k^1$ ein offenes Unterschema und v ein gewöhnlicher Punkt für U , der die Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 2.1.9 erfüllt. Dann ist, falls $\ell \neq p = \text{ch}(k)$, die Restriktionsabbildung*

$$H^1(U, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(U_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

surjektiv.

Beweis. Das folgt aus Proposition 2.1.9 und Proposition 2.2.2. \square

Sei nun $f : \mathcal{X} \rightarrow S \subset S_k$ und $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ wie vor Satz 2.1.1.

Proposition 2.2.4. *Sei f glatt, $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ ein über S etaler Divisor, $\mathcal{U}(S) \neq \emptyset$ und v ein schwacher ℓ -Blochpunkt für $U = \mathcal{U} \times_S k$. Dann ist die Restriktionsabbildung*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(\mathcal{U}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$$

surjektiv.

Beweis. Sei $\pi : \mathcal{U} \rightarrow S$ der Strukturmorphismus. Nach Lemma 2.1.6 gilt $(R^1\pi_*\mathbb{Z}/\ell^m)_{\overline{s}} \simeq H^1(\overline{U}, \mathbb{Z}/\ell^m)$ für alle geometrischen Punkte \overline{s} von S . Aus der Leray-Spektralsequenz (1.19) erhalten wir das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(S, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\overline{U}, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_k} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(S_v, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U}_v, \mathbb{Z}/\ell^m) & \longrightarrow & H^1(\overline{U}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)^{G_{k_v}} \longrightarrow 0. \end{array} \quad (2.4)$$

Wie eben prüft man leicht nach, daß alle senkrechten Pfeile surjektiv sind. \square

Korollar 2.2.5. *Bezeichne V_v die spezielle Faser von \mathcal{U}_v , und sei v ein ℓ -Blochpunkt für U . Dann erhalten wir eine Surjektion*

$$H^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}/\ell^m) \rightarrow H^1(V_v, \mathbb{Z}/\ell^m).$$

Beweis. Nach Korollar 2.1.5 ist $H^1(\overline{U}, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq H^1(\overline{V}_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$ und zufolge (2.4) auch $H^1(\mathcal{U}_v, \mathbb{Z}/\ell^m) \simeq H^1(V_v, \mathbb{Z}/\ell^m)$. Daher folgt die Behauptung aus Proposition 2.2.4. \square

Kapitel 2: Realisierung nilpotenter Gruppen

3 Scholzüberlagerungen

3.1 Scholzdivisoren

Sei X ein reguläres, lokal-noethersches Schema und D ein Divisor auf X . Wie bisher seien alle Divisoren als reduziert angenommen. Wir identifizieren D mit dem assoziierten, abgeschlossenen Unterschema von X bzw. mit der Menge abgeschlossener Punkte D_0 . Für ein $x \in X$ bezeichne $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ die Kompletterung des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$.

Definition 3.1.1. Sei n eine positive, ganze Zahl. Ein Divisor D auf X heißt ein n -Scholzdivisor (oder kurz: n -scholz), falls für jeden generischen Punkt ξ von D der lokale Ring $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$ eine primitive n -te Einheitswurzel enthält.

Alternativ hat man auch die folgende Beschreibung:

Lemma 3.1.2. Sei k ein Körper, X ein reguläres, lokal-noethersches k -Schema und n eine auf X invertierbare, positive, ganze Zahl. Ein Divisor D auf X ist genau dann n -scholz, falls für jeden generischen Punkt ξ von D der Restklassenkörper $\kappa(\xi)$ eine primitive n -te Einheitswurzel enthält.

Beweis. (\Rightarrow) Setze $k' = \kappa(\xi)$. Der reguläre lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\xi}$ ist equicharakteristisch, und somit gilt für seine Kompletterung

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi} \simeq k'[[T]] \tag{3.1}$$

[Mat86, Thm. 29.7]. Nach Voraussetzung enthält $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Diese ist algebraisch und, da k' in $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$ algebraisch abgeschlossen ist, folglich in k' enthalten.

(\Leftarrow) Klar, wegen (3.1). □

Sei S ein integres Schema und $\mathcal{X} \rightarrow S$ ein flaches, reguläres, lokal-noethersches Schema. Wir sagen, ein Divisor \mathcal{D} auf \mathcal{X} sei *etal* bzw. *horizontal*, falls die Komposition $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{X} \rightarrow S$ etal ist, bzw. jede irreduzible Komponente von \mathcal{D} surjektiv auf S abgebildet wird. Dann gilt allgemeiner

Korollar 3.1.3. Für S und $\mathcal{X} \rightarrow S$ wie eben bezeichne X die generische Faser. Ferner sei n eine auf X invertierbare, positive, ganze Zahl. Dann ist ein horizontaler Divisor \mathcal{D} auf \mathcal{X} genau dann n -scholz, falls für jeden generischen Punkt ξ von \mathcal{D} der Restklassenkörper $\kappa(\xi)$ eine primitive n -te Einheitswurzel enthält; also genau dann, wenn $D = \mathcal{D} \times_{\mathcal{X}} X$ n -scholz ist.

Das ist trivial wegen $\mathcal{O}_{X,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi} \otimes_{\mathcal{O}_S} k = \mathcal{O}_{X,\xi}$, wobei k den Funktionenkörper von S bezeichnet.

Nach Lemma 3.1.2 ist offensichtlich, daß horizontale Scholzdivisoren mit beliebigem, flachen Basiswechsel verträglich sind.

Korollar 3.1.4. *Seien S ein integrales Schema und $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ein flacher Morphismus zwischen flachen, regulären, lokal-noetherschen S -Schemata, sowie n eine auf \mathcal{X} invertierbare, positive, ganze Zahl. Ist dann \mathcal{D} ein horizontaler n -Scholzdivisor auf \mathcal{X} , so auch $f^*\mathcal{D}$ auf \mathcal{X}' .*

Beweis. Nach [EGA IV, 21.4.5] ist $f^*\mathcal{D}$ ein Divisor auf \mathcal{X}' . Sei nun ξ' ein generischer Punkt von $f^*\mathcal{D}$ und $\xi = f(\xi')$ ein ebensolcher von \mathcal{D} . Der lokale Homomorphismus $\mathcal{O}_{X,\xi} \rightarrow \mathcal{O}_{X',\xi'}$ induziert die Inklusion $\kappa(\xi) \hookrightarrow \kappa(\xi')$. Daraus folgt die Behauptung zusammen mit Korollar 3.1.3. \square

Lemma 3.1.5. *Sei S ein integrales, normales Schema der Dimension 1, n eine auf S invertierbare, positive, ganze Zahl und $\mathcal{X} \rightarrow S$ ein flaches, glattes, noethersches Schema von relativer Dimension 1. Ferner sei \mathcal{D} ein horizontaler, über S etaler n -Scholzdivisor auf \mathcal{X} , und Y_v bezeichne die Faser über einem abgeschlossenen Punkt v von S . Dann ist $D_v := \mathcal{D} \times_{\mathcal{X}} Y_v$ ein n -Scholzdivisor auf Y_v .*

Beweis. Wir können o.E. S lokal voraussetzen. Denn $\text{Spec } \mathcal{O}_{S,v} \rightarrow S$ ist flach und also $f : \mathcal{X} \times_S \text{Spec } \mathcal{O}_{S,v} \rightarrow \mathcal{X}$ ein flacher Morphismus zwischen regulären Schemata. Also ist nach Korollar 3.1.4 auch $f^*\mathcal{D}$ ein n -Scholzdivisor, und außerdem horizontal und etal.

Sei nun also o.E. $S = \text{Spec } \mathcal{O}_{S,v}$ regulär und \mathcal{D} irreduzibel mit generischem Punkt ξ . Sei ξ_v der generische Punkt von D_v . Wir haben zu zeigen, daß $\widehat{\mathcal{O}}_{Y_v,\xi_v}$ eine primitive n -te Einheitswurzel ζ enthält. Nach Lemma 3.1.2 reicht es dafür $\zeta \in \kappa(\xi_v) \simeq \mathcal{O}_{Y_v,\xi_v}/\mathfrak{m}_v$, wo \mathfrak{m}_v das maximale Ideal von \mathcal{O}_{Y_v,ξ_v} ist, zu zeigen. Es gilt

$$\kappa(\xi_v) \simeq \mathcal{O}_{X,\xi_v}/\mathfrak{m} \simeq (\mathcal{O}_{X,\xi_v}/\mathfrak{p})/(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{D},\xi_v}/\mathfrak{m}_{\mathcal{D}} =: \kappa_{\mathcal{D}}(v),$$

wo \mathfrak{m} das maximale Ideal und \mathfrak{p} das zu \mathcal{D} gehörige Primideal von \mathcal{O}_{X,ξ_v} , sowie $\mathfrak{m}_{\mathcal{D}}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathcal{D},\xi_v}$ bezeichnet. Da S regulär und \mathcal{D} über S etal ist, ist auch $\mathcal{O}_{\mathcal{D},\xi_v}$ regulär, also insbesondere ganz abgeschlossen. Nach Korollar 3.1.3 enthält $\kappa(\xi)$ eine primitive n -te Einheitswurzel ζ . Da ζ ganz und n auf S invertierbar ist, folgt $\zeta \in \mathcal{O}_{\mathcal{D},\xi_v}$ und schließlich $\zeta \in \kappa_{\mathcal{D}}(v) \simeq \kappa(\xi_v)$. \square

3.2 Galoisüberlagerungen

Sei Y ein Schema, G eine endliche Gruppe und $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(Y)$ ein Gruppenhomomorphismus. In diesem Fall sagen wir, G operiert (via φ) durch Automorphismen auf Y . Ist φ injektiv, so nennen wir die Operation treu.

Definition 3.2.1. Sei Y ein Schema und G eine endliche Gruppe, die treu durch Automorphismen auf Y operiert. Ein endlicher Schemamorphismus $p : Y \rightarrow X$ heißt eine *Galoisüberlagerung mit Gruppe G* , falls $\mathcal{O}_X \simeq p_*(\mathcal{O}_Y)^G$ gilt. Ist $p : Y \rightarrow X$ überdies ein Morphismus von S -Schemata und operiert G durch S -Automorphismen von Y , so sagen wir p sei eine *S -Galoisüberlagerung mit Gruppe G* .

Dabei ist $p_*(\mathcal{O}_Y)^G$ die Garbe die durch $U \mapsto p_*(\mathcal{O}_Y)(U)^G = \mathcal{O}_Y(p^{-1}U)^G$ für offene Teilmengen U von X gegeben wird.

Proposition 3.2.2. Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Galoisüberlagerung mit Gruppe G . Dann gilt:

- (i) p ist surjektiv, seine Fasern sind G -Orbits und die Topologie auf X stimmt mit der Quotiententopologie von Y überein.
- (ii) (X, p) ist ein Quotientenschema von Y ; d.h. $X = Y/G$ und X stellt den Funktor $Z \mapsto \text{Hom}(Y, Z)^G$ dar. Insbesondere ist p G -invariant.
- (iii) Jedes offene Unterschema U von X ist ein Quotient von $p^{-1}(U)$ nach G .
- (iv) Ist $H \leq G$ eine Untergruppe, so existiert Y/H und $Y \rightarrow Y/H$ ist eine Galoisüberlagerung mit Gruppe H . Ist $H \trianglelefteq G$ sogar ein Normalteiler, so ist $Y/H \rightarrow X$ eine Galoisüberlagerung mit Gruppe G/H .
- (v) Sei nun $p : Y \rightarrow X$ eine S -Galoisüberlagerung. Dann ist Y genau dann separiert über S , wenn X es ist.
- (vi) Sei p wie in (v) und $S' \rightarrow S$ ein flacher Basiswechsel, so daß $Y' = Y \times_S S' \rightarrow X' = X \times_S S'$ bezüglich der induzierten G -Operation (d.h. G operiert trivial auf S') invariant ist. Dann ist $Y' \rightarrow X'$ eine S' -Galoisüberlagerung mit Gruppe G . Ferner gilt $Y'/G \times_S S' \simeq (Y \times_S S')/G$.

Beweis. (i) folgt aus [SGA 1, V, Prop. 1.3]. Ferner folgen (v) aus [loc. cit., Cor. 1.5], (ii) aus (i) und $\mathcal{O}_X \simeq p_*(\mathcal{O}_Y)^G$ und (iii) aus [loc. cit., Cor. 1.4]. Die Existenz von $Z = Y/H$ in (iv) ist in [loc. cit., Cor. 1.7] gezeigt. Der zweite Teil ist auch klar, denn sei $p = p_2 p_1$, so gilt $p_{2*}(\mathcal{O}_Z)^{G/H} \simeq ((p_{2*} p_{1*}(\mathcal{O}_Y))^H)^{G/H} \simeq p_*(\mathcal{O}_Y)^G \simeq \mathcal{O}_X$. Schließlich folgt (vi) aus [loc. cit., Prop. 1.9]. \square

Die Proposition zeigt, daß eine Galoisüberlagerung im Sinne von Definition 3.2.1 auch eine Galoisüberlagerung im Sinne der Vorbemerkung ist.

Proposition 3.2.3. Sei X ein exzellentes, normales, integres, noethersches Schema mit Funktionenkörper K , L/K eine endliche Galoisweiterung mit Gruppe G . Bezeichne Y die Normalisierung von X in L und $p : Y \rightarrow X$ den kanonischen Morphismus. Dann operiert G treu durch Automorphismen auf Y und p ist eine Galoisüberlagerung mit Gruppe G .

Beweis. Sei (X_i) eine Überdeckung von X durch offene, affine Unterschemata, $X_i = \text{Spec } B_i$. Dann ist nach Konstruktion $Y_i = p^{-1}(X_i)$ ein offenes, affines Unterschema von Y , $Y_i = \text{Spec } A_i$, also p insbesondere affin, und $A_i^G = B_i$ oder äquivalent $Y_i/G = X_i$. Die Y_i liefern eine Überdeckung von Y durch G -invariante, offene, affine Unterschemata. Die G -Operation auf den Y_i stimmt auf $Y_i \cap Y_j$ überein. Denn für $y \in Y_i \cap Y_j$ ist $p^{-1}(p(y)) \subseteq Y_i \cap Y_j$ und nach Proposition 3.2.2(i) stimmt $p^{-1}(p(y))$ mit dem G -Orbit von y in Y_i bzw. Y_j überein. Dann gibt es ein offenes, affines Unterschema $X_{ij} = \text{Spec } B_{ij}$ mit $p(y) \in X_{ij} \subset X_i \cap X_j$, und es gilt $B_{ij} = B_i S_i^{-1} = B_j S_j^{-1}$. Dann ist $y \in p^{-1}(X_{ij}) = \text{Spec } A_{ij}$, wo A_{ij} der ganze Abschluß von B_{ij} in L ist. Nach [Bourbaki, Alg. comm.; V §1 no. 5 Prop. 16] gilt $A_{ij} = A_i S_i^{-1} = A_j S_j^{-1}$. Folglich stimmt die G -Operation auf A_{ij} und daher auch auf $p^{-1}(p(y))$ überein. Somit lassen sich die von $g \in G$ induzierten Automorphismen der Y_i zu Automorphismen von Y verkleben, und G operiert folglich treu durch Automorphismen auf Y , denn G operiert bereits treu auf den Y_i . Nach Konstruktion gilt $\mathcal{O}_X \simeq p_*(\mathcal{O}_Y)^G$ und also ist p eine Galoisüberlagerung. \square

Sei G eine endliche Gruppe, die durch Automorphismen auf einem Schema Y operiert. Für $y \in Y$ definieren wir die *Zerlegungsgruppe* D_y von y als den Stabilisator von y in G . Die Gruppe D_y operiert daher auf dem lokalen Ring $\mathcal{O}_{Y,y}$ und folglich auch auf dem Restklassenkörper $\kappa(y)$. Der Kern des Homomorphismus $D_y \rightarrow \text{Aut}(\kappa(y))$ heißt die *Trägheitsgruppe* I_y von y .

Proposition 3.2.4. *Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Galoisüberlagerung mit Gruppe G , X lokal-noethersch, $y \in Y$ und $x = p(y)$ sein Bild in X . Dann gilt*

(i) $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y} \rightarrow \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ ist eine Galoisüberlagerung mit Gruppe D_y ;

(ii) Die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(y)/\kappa(x)$ ist normal und wir haben die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow I_y \rightarrow D_y \rightarrow \text{Aut}(\kappa(y)/\kappa(x)) \rightarrow 1,$$

wo $\text{Aut}(\kappa(y)/\kappa(x))$ die Gruppe der $\kappa(y)$ -Automorphismen von $\kappa(x)$ bezeichnet;

(iii) Sei Y zusammenhängend. p ist genau dann in y etal, wenn $I_y = 1$ gilt.

Beweis. (i) Wir wissen bereits, $D_y \hookrightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}/\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$. Es reicht zu zeigen, daß $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}^{D_y} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ gilt. Das ist aber klar, denn nach Proposition 3.2.2(vi) ist $Y \times_X \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \rightarrow \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ eine Galoisüberlagerung mit Gruppe G . Folglich ist $Y \times_X \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = \text{Spec } A$ mit $A^G = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Weiter ist $A \simeq \bigoplus_{y' \in p^{-1}(x)} \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y'} \simeq \text{Ind}_{D_y}^G \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, denn die Faser über x ist ein G -Orbit (Proposition 3.2.2(i)).

(ii) [SGA 1, V, Prop. 1.3]

(iii) [SGA 1, V, Cor. 2.4] Man beachte, die Rückrichtung (\Leftarrow) gilt auch ohne die Voraussetzung Y zusammenhängend [loc. cit., Cor. 2.3]. \square

Bemerkung 3.2.5. Es ist vielleicht notwendig, noch ein paar Worte über die Aussage von Proposition 3.2.4(ii) zu verlieren. Bezeichnet $\kappa(y)_s$ die maximale separable Zwischenerweiterung von $\kappa(y)/\kappa(x)$, so ist $\kappa(y)_s/\kappa(x)$ galoissch und es gilt $\text{Aut}(\kappa(y)/\kappa(x)) = \text{Gal}(\kappa(y)_s/\kappa(x))$ [Bourbaki, Alg. comm., Ch. V §2 no. 2 Thm. 2]. Insbesondere kann $D_y = 1$ gelten, obwohl $\kappa(y) \neq \kappa(x)$. In diesem Fall ist $\kappa(y)/\kappa(x)$ eine radikale Erweiterung, die sogar unendlichen Grad haben kann [loc. cit.]. Ist $\kappa(x)$ perfekt, so ist natürlich $\kappa(y)$ eine galoissche Erweiterung.

Sei Y ein zusammenhängendes Schema auf dem eine endliche Gruppe G durch Automorphismen operiert, $f : Y \rightarrow X$ ein G -invarianter Morphismus, $y \in Y$ und $x = f(y)$ sein Bild in X . Gilt $I_y \neq 1$, so sagen wir y verzweigt in f . Andererseits sagen wir f ist in x verzweigt, falls es ein $y' \in f^{-1}(x)$ mit $I_{y'} \neq 1$, also ein y' das in f verzweigt, gibt. y heißt rein verzweigt in f , falls $D_y = I_y \neq 1$, und zahm verzweigt, falls $\text{ch}(\kappa(y)) \nmid \#I_y$ gilt. Ist f in x nicht verzweigt, so sagen wir f ist in x unverzweigt. (Falls f eine Galoisüberlagerung ist, so ist das äquivalent dazu, daß f in allen Punkten über x ein unverzweigter Morphismus ist.) Gilt $D_y = 1$, so heißt y vollständig zerlegt.

Sei nun f eine G -Galoisüberlagerung. Dann sind die Trägheitsgruppen aller $y \in f^{-1}(x)$ konjugiert und f ist in x verzweigt, falls einer und damit alle Punkte über x in f verzweigen, bzw. falls f über x nicht etal ist (Proposition 3.2.4(iii)). Bezeichne D das kleinste Unterschema von X , so daß $Y \setminus f^{-1}D \xrightarrow{f} X \setminus D$ etal ist. Für reguläres, lokal-noethersches X ist D nach dem Reinheitssatz von Zariski-Nagata [SGA 2, X] ein abgeschlossenes Unterschema der reinen Kodimension 1 und definiert daher einen Divisor, den sogenannten Verzweigungsdivisor $D = D(f)$ auf X . Nach Proposition 3.2.2(vi) ist $Y \setminus f^{-1}D \xrightarrow{f} X \setminus D$ eine etale Galoisüberlagerung, oder äquivalent dazu ein endlicher, etaler Morphismus [SGA 1, V, Prop. 3.1], d.h. eine etale Überlagerung im Sinne von loc. cit.. Die etalen Überlagerungen von $X \setminus D$ werden durch die etale Fundamentalgruppe $\pi_1(X \setminus D)$ von $X \setminus D$ beschrieben.

Bevor wir zu einer spezielleren Situation übergehen, erwähnen wir noch

Proposition 3.2.6. *Sei $f : Y \rightarrow X$ eine S -Galoisüberlagerung und S' bzw. $f' : Y' \rightarrow X'$ wie in Proposition 3.2.2(vi). Weiter sei $y' \in Y'$ und y sein Bild in Y . Dann ist y genau dann in f verzweigt, wenn y' in f' verzweigt. Außerdem gilt, ist y rein verzweigt, so auch y' .*

Beweis. Nach Proposition 3.2.2(vi) ist f' eine S' -Galoisüberlagerung mit selber Gruppe G wie f . Dann gilt $I_y = I_{y'}$ [SGA 1, V, Prop. 2.1]. Das zeigt die erste Aussage, für die zweite sei $D_y = I_y$. Bezeichne x bzw x' das Bild von y bzw. y' in X bzw. X' , sowie $\kappa(y)_s$ bzw. $\kappa(y')_s$ die maximalen separablen Zwischenerweiterungen von $\kappa(y)/\kappa(x)$ bzw. $\kappa(y')/\kappa(x')$. Wir haben $\kappa(y')_s = \kappa(x')$ zu zeigen. Nach Proposition 3.2.4(ii) und der nachfolgenden Bemerkung gilt $\kappa(y)_s = \kappa(x)$ und daher

$$\kappa(y')_s \hookrightarrow \kappa(y)_s \otimes_{\kappa(x)} \kappa(x') = \kappa(x'). \quad (3.2)$$

Das zeigt $D_{y'} = I_{y'}$. □

Bemerkung 3.2.7. Die Umkehrung der letzten Aussage in Proposition 3.2.6 ist im allgemeinen falsch. Gilt nämlich $\kappa(y)_s \hookrightarrow \kappa(x')$ in (3.2), so ist $\kappa(y)_s \otimes_{\kappa(x)} \kappa(x') = \bigoplus \kappa(x')$ und folglich können Punkte auf X' rein verzweigt sein ohne das ihre Bildpunkte in X rein verzweigt wären.

Sei nun S ein normales, integres, 1-dimensionales (und folglich reguläres) Schema mit generischem Punkt η und $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine S -Galoisüberlagerung mit Gruppe G zwischen normalen, integren, relativen Kurven über S . Bezeichne X bzw. X' die generischen Fasern von \mathcal{X} bzw. \mathcal{X}' . Der induzierte Morphismus $X' \rightarrow X$ ist eine $\kappa(\eta)$ -Galoisüberlagerung mit Gruppe G (Proposition 3.2.2(vi)) und sei mit f_η bezeichnet.

Sei nun \mathcal{X} als regulär vorausgesetzt. Für einen Divisor D auf \mathcal{X} setze $D_\eta = D \times_{\mathcal{X}} X$. Bezeichne $D(f)$ bzw. $D(f_\eta)$ den Verzweigungsdivisor von f bzw. f_η . Dann gilt $D(f)_\eta = D(f_\eta)$. Sei jetzt $D = D(f)$. Da S Dimension 1 besitzt, ist das Bild eines irreduziblen Divisors auf \mathcal{X} unter dem Strukturmorphismus $\mathcal{X} \rightarrow S$ entweder ein abgeschlossener Punkt von S oder ganz S . Im ersten Fall nennen wir den Divisor *vertikal* im zweiten *horizontal*. Offensichtlich hat man eine Zerlegung

$$D = D_{\text{hor}} + D_{\text{ver}} \quad (3.3)$$

in horizontale und vertikale Komponenten. Da \mathcal{X} von Dimension 2 ist, sind die vertikalen Komponenten eines Divisors irreduzible Komponenten von speziellen Fasern. Ferner gilt $D_\eta = D_{\text{hor}} \times_{\mathcal{X}} X$, und umgekehrt ist D_{hor} der Abschluß von D_η in \mathcal{X} [EGA IV, 2.8.5]. Aus Funktorialitätsgründen haben wir einen Homomorphismus

$$\pi_1(X \setminus D_\eta) \rightarrow \pi_1(\mathcal{X} \setminus D). \quad (3.4)$$

Das ruft nun die Frage auf den Plan, wann ein Homomorphismus $\pi_1(X \setminus D_\eta) \rightarrow G$ über den vorstehenden Homomorphismus faktorisiert?

Es reicht die Frage für lokale Kurven, d.h. Kurven über lokalen Körpern, zu beantworten (Prop. 3.2.6). Sei dazu jetzt $S = \text{Spec } R$ das Spektrum eines vollständigen, diskreten Bewertungsrings R mit generischem Punkt η und speziellem Punkt ζ . Bezeichne $S^{sh} = \text{Spec } R^{sh}$ die strikte Henselisierung von S . Für ein beliebiges S -Schema X setzen wir $X^{sh} := X \times_S S^{sh}$. Weiter seien $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ relative Kurven wie oben, $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine S -Galoisüberlagerung mit abelscher Gruppe G und $f_\eta : X' = \mathcal{X}' \otimes_S \kappa(\eta) \rightarrow X = \mathcal{X} \otimes_S \kappa(\eta)$ die induzierte $\kappa(\eta)$ -Galoisüberlagerung. Der Verzweigungsdivisor von f bzw. f_η sei mit $D(f)$ bzw. $D(f_\eta)$ bezeichnet. Setzte im folgenden, im Gegensatz zu oben, $D = D(f)_{\text{hor}}$. Dann ist D ein horizontaler Divisor auf \mathcal{X} mit $D_\eta = D(f_\eta)$. Obige Frage läßt sich dann auch so aussprechen, nämlich, wann gilt $D = D(f)$?

Nun bestimmt f_η eine Klasse $\varepsilon \in H^1(X \setminus D_\eta, G)$ und diese nach Wahl eines η -rationalen Punkts $s : \eta \rightarrow X \setminus D_\eta$ wegen der exakten Sequenz

$$1 \rightarrow H^1(\eta, G) \rightarrow H^1(X \setminus D_\eta, G) \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, G)$$

ihrerseits Klassen $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)} = s^*(\varepsilon) \in H^1(\eta, G)$ und $\varepsilon_{\text{geo}} \in H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, G)$. Die Klasse $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)}$ heißt *unverzweigt*, falls sie unter der Restriktionsabbildung $H^1(\eta, G) \rightarrow H^1(I_{\kappa(\eta)}, G)$ verschwindet.

Bezeichne $I_{\kappa(\eta)}$ die absolute Trägheitsgruppe von $G_{\kappa(\eta)}$ und Y die spezielle Faser von \mathcal{X} .

Proposition 3.2.8. *Sei nun ein S -rationaler Punkt $s : S \rightarrow \mathcal{X} \setminus D$ fixiert und G eine endliche, abelsche Gruppe. Dann ist $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)}$ unverzweigt, falls f in Y (genauer in allen generischen Punkten von Y) unverzweigt ist. Sei nun $H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh}, G)^{\pi_1(S)} \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, G)^{\pi_1(\eta)}$ surjektiv. Dann ist umgekehrt f in Y unverzweigt, falls $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)}$ unverzweigt ist.*

Beweis. Bezeichne $\iota : \eta \rightarrow S$ die Einbettung des generischen Punkts und $\iota' : X = \eta \times_S \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ den Basiswechsel. Auf Grund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts existiert ein Schnitt $s_\eta : \eta \rightarrow X \setminus D_\eta$ mit $\iota' s_\eta = s \iota$. Daraus folgt nun, daß ι'^* in

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & H^1(S, G) & \xleftarrow[\alpha]{s^*} & H^1(\mathcal{X} \setminus D, G) & \xrightarrow{\beta} & H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh}, G)^{\pi_1(S)} \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow \iota^* & & \downarrow \iota'^* & & \downarrow \iota''^* \\
1 & \longrightarrow & H^1(\eta, G) & \xleftarrow[\gamma]{s_\eta^*} & H^1(X \setminus D_\eta, G) & \xrightarrow{\delta} & H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, G)^{\pi_1(\eta)} \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & Q_3 \longrightarrow 1 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

mit der durch s^* bzw. s_η^* induzierten direkten Summenzerlegung verträglich ist. Denn s^* bzw. s_η^* induzieren Schnitte $s'^* : \beta(x) \mapsto x - \alpha s^*(x)$ bzw. $s_\eta'^* : \delta(x) \mapsto x - \gamma s_\eta^*(x)$ von β bzw. δ , und es gilt $(\alpha s^* + s'^* \beta)(x) = \alpha s^*(x) + x - \alpha s^*(x) = x$; analog für $s_\eta'^*$. Die Schnitte s'^* und $s_\eta'^*$ sind wohldefiniert. Gilt nämlich beispielsweise $\beta(x) = \beta(x')$, so ist $x = x' + \alpha(y)$ und folglich $x - \alpha s^*(x) = x' + \alpha(y) - (\alpha s^*(x') + \alpha(y)) = x' - \alpha s^*(x')$. Andererseits ist $\iota'^* \alpha s^* = \gamma \iota^* s^* = \gamma s_\eta^* \iota'^*$ und folglich

$$\begin{aligned}
\iota'^* &= \iota'^* \alpha s^* + \iota'^* s'^* \beta = \iota'^* \alpha s^* + \iota'^* - \iota'^* \alpha s^* \\
&= \gamma s_\eta^* \iota'^* + \iota'^* - \gamma s_\eta^* \iota'^* = \gamma s_\eta^* \iota'^* + s_\eta'^* \delta \iota'^*.
\end{aligned}$$

Das zeigt $\iota'^* = \iota^* \oplus \iota''^*$, woraus weiter $Q_2 = Q_1 \oplus Q_3$ folgt. Insbesondere verschwindet das Bild von ε in Q_2 genau dann, falls die Bilder von $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)}$ in Q_1 bzw. $\varepsilon_{\text{geo}}^{(s)}$ in Q_3 verschwinden.

Nach Voraussetzung ist ι''^* surjektiv, also $Q_3 = 0$. Da sich andererseits Q_1 injektiv in $H^1(I_{\kappa(\eta)}, G)$ einbettet, folgt die Behauptung. \square

Die Proposition zeigt außerdem, daß, falls die geometrische Restriktionsabbildung surjektiv ist, die Aussage unabhängig von der Wahl des S -rationalen Punkts s ist. Wir erlauben uns daher ε_{ar} anstelle $\varepsilon_{\text{ar}}^{(s)}$ zu schreiben.

Korollar 3.2.9. Sei G eine endliche, abelsche Gruppe, $H^1((\mathcal{X}\setminus D)^{sh}, G)^{\pi_1(S)} \rightarrow H^1(\overline{X\setminus D_\eta}, G)^{\pi_1(\eta)}$ surjektiv und besitze $\mathcal{X}\setminus D$ einen S -rationalen Punkt. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist in Y unverzweigt.
- (b) ε_{ar} ist unverzweigt.
- (c) Für alle $x' \in X'_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x'\}} \subset \mathcal{X}'$ disjunkt zu $f^{-1}(D)$ ist, ist die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ unverzweigt.
- (d) Es gibt ein $x \in X_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x\}} \subset \mathcal{X}$ disjunkt zu D und etal über S und für alle $x' \in f^{-1}(x)$ die Körpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(x)$ unverzweigt ist.

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt aus Proposition 3.2.8.

Es gibt ein offenes Unterschema $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}\setminus D$, glatt über S , so daß $\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} Y$ offen und nicht leer in Y ist [EGA IV, 6.5.2(ii) + 6.12.5]. Indem wir einen Punkt in $(\mathcal{U} \times_{\mathcal{X}} Y)_0$ wählen, finden wir einen Punkt $x_0 \in X_0$, so daß $\overline{\{x_0\}} \subset \mathcal{X}\setminus D$ etal über S ist [EGA IV, 18.5.17]. Sei $x'_0 \in X'_0$ ein Punkt mit $f(x'_0) = x_0$. Nach Wahl von x_0 erfüllt x'_0 die Bedingungen von Aussage (c) und daher Aussage (d). Das zeigt (c) \Rightarrow (d). Wir nehmen nun (d) an. Setze $x = x_0$. Aus der Einbettung $x_0 \hookrightarrow X\setminus D_\eta \rightarrow \eta$ erhalten wir die Kommutativität des Dreiecks in

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\eta, G) & \xleftarrow{s_\eta^*} & H^1(X\setminus D_\eta, G) & \longleftarrow & H^1(\mathcal{X}\setminus D, G) \\ & \searrow \pi^* & \downarrow s_0^* & & \downarrow \\ & \text{res} & H^1(x_0, G) & \longleftarrow & H^1(\overline{\{x_0\}}, G) \end{array}$$

wobei die diagonale Abbildung die Restriktionsabbildung der Galoiskohomologie ist. Aus der Kommutativität des Quadrats und der Voraussetzung über den oberen rechten, horizontalen Pfeil ist $s_0^* \varepsilon_{geo}$ unverzweigt. Andererseits ist Aussage (d) zufolge $\kappa(x'_0)/\kappa(x_0)$ und also auch $s_0^* \varepsilon$ unverzweigt. Somit ist auch $s_0^* \varepsilon - s_0^* \varepsilon_{geo} = s_0^* \pi^* s_\eta^* \varepsilon = \text{res}(s_\eta^* \varepsilon) = \text{res}(\varepsilon_{ar})$ unverzweigt. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(\eta, G) & \longrightarrow & H^1(I_{\kappa(\eta)}, G) \\ \text{res} \downarrow & & \parallel \\ H^1(x_0, G) & \longrightarrow & H^1(I_{\kappa(x_0)}, G), \end{array}$$

wobei $I_{\kappa(\eta)}$ bzw. $I_{\kappa(x_0)}$ die Trägheitsgruppe von $G_{\kappa(\eta)}$ bzw. $G_{\kappa(x_0)}$ bezeichnet, zeigt nun die Unverzweigtheit von ε_{ar} . Dabei ergibt sich die Gleichheit auf der rechten Seite aus der Tatsache, daß $\overline{\{x\}}$ etal über S ist. Somit gilt (d) \Rightarrow (b). Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir nun noch (a) \Rightarrow (c).

Sei dazu $x' \in (\mathcal{X}' \setminus f^{-1}(D))_{hor}$; d.h. $\overline{\{x'\}} \cap f^{-1}(D) = \emptyset$ und $f(x') \neq \xi$. Überdies sei $x = f(x')$ und $Z = \overline{\{x\}} \subset \mathcal{X}$. Wegen $Z \cap D = \emptyset$ ist $Z' = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} Z \rightarrow Z$ etal,

und $Z' \times_{\mathcal{X}'} X' = f^{-1}(x)$. Da Z affin ist, ist Z' folglich disjunkte Vereinigung affiner Unterschemata $Z'_{x'} \subset \mathcal{X}'$ für $x' \in f^{-1}(x)$. Bezeichne \mathcal{O}_x den Ganzheitsring von $\kappa(x)$. Dann ist Z das Spektrum einer Ordnung in \mathcal{O}_x , und wir haben einen Morphismus $\text{Spec } \mathcal{O}_x \rightarrow Z$, bzw. ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z'_{x'} & \longleftarrow & Z'_{x'} \times_Z \text{Spec } \mathcal{O}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longleftarrow & \text{Spec } \mathcal{O}_x \end{array}$$

für alle $x' \in f^{-1}(x)$. Nach dem bereits Gesagten ergibt sich, daß $Z'_{x'} \times_Z \text{Spec } \mathcal{O}_x \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_x$ affin und etal ist. Folglich ist $Z'_{x'} \times_Z \text{Spec } \mathcal{O}_x$ regulär, insbesondere normal [Mat86, Thm. 19.4] und integer [Mat86, Thm. 20.3], und also gleich dem Spektrum der Maximalordnung von $\kappa(x')$. Das zeigt die Unverzweigtkeit der Erweiterung $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$. \square

Als nächstes eliminieren wir den Schnitt aus der Aussage von Korollar 3.2.9.

Korollar 3.2.10. *Sei G eine endliche, abelsche Gruppe. Ist $H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh}, G)^{\pi_1(S)} \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D}_\eta, G)^{\pi_1(\eta)}$ surjektiv, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) f ist in Y unverzweigt.
- (b) Für alle $x' \in X'_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x'\}} \subset \mathcal{X}'$ disjunkt zu $f^{-1}(D)$ ist, ist die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ unverzweigt.
- (c) Es gibt ein $x \in X_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x\}} \subset \mathcal{X}$ disjunkt zu D und etal über S und für alle $x' \in f^{-1}(x)$ die Körpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(x)$ unverzweigt ist.

Beweis. Der Beweis von (a) \Rightarrow (b) ist identisch mit dem von (a) \Rightarrow (c) aus Korollar 3.2.9, da der Beweis von der Existenz eines Schnittes keinen Gebrauch macht.

Nach [EGA IV, 17.7.4] ist Aussage (a) lokal für die etale Topologie auf \mathcal{X} . Andererseits, zeigt die Konstruktion von x_0 im Beweis von Korollar 3.2.9, daß auch die Existenz eines Schnittes lokal für die etale Topologie ist; d.h. es gibt einen etalen Morphismus $\tilde{S} \rightarrow S$, so daß $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_S \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ einen Schnitt besitzt, $\tilde{\mathcal{X}}$ glatt und $D \times_S \tilde{S}$ etal über \tilde{S} . Da außerdem Aussage (b) auch für $\tilde{\mathcal{X}}' = \mathcal{X}' \times_S \tilde{S}$ anstelle \mathcal{X}' zutrifft, können wir Korollar 3.2.9 anwenden und sehen, daß die induzierte Überlagerung \tilde{f} in $\tilde{Y} = Y \times_S \tilde{S}$ unverzweigt ist. Also ist (a) \Leftrightarrow (b).

Da Aussage (c) mit etalem Basiswechsel verträglich ist, zeigt Korollar 3.2.9 (c) \Rightarrow (a). Andererseits existiert ein Divisor $\overline{\{\tilde{x}_0\}}$ in $\tilde{\mathcal{X}}$ etal über \tilde{S} , so daß für alle Punkte \tilde{x}'_0 über \tilde{x}_0 die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(\tilde{x}'_0)/\kappa(\tilde{x}_0)$ unverzweigt ist. Bezeichne x_0 das Bild von \tilde{x}_0 unter $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$. Nach [EGA IV, 17.7.4] ist dann auch $\overline{\{x_0\}}$ in \mathcal{X} etal über S und die Restklassenkörpererweiterungen zu Punkten über x_0 sind unverzweigt. Also (a) \Rightarrow (c). \square

Wir verallgemeinern nun das vorstehende Korollar auf nilpotente Gruppen.

Korollar 3.2.11. *Sei $\ell \neq p = \text{ch}(\kappa(\zeta))$ eine Primzahl und G eine endliche ℓ -Gruppe. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist in Y unverzweigt,*

(b) *Für alle $x' \in X'_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x'\}} \subset \mathcal{X}$ disjunkt zu $f^{-1}(D)$ ist, ist die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ unverzweigt.*

falls $\pi_1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh})^{(p')} \simeq \pi_1(\overline{X \setminus D_\eta})^{(p')}$ gilt. Man beachte, daß (a) \Rightarrow (b) auch ohne diese letzte Bedingung gilt.

Beweis. (a) \Rightarrow (b) Der Beweis ist der selbe wie (a) \Rightarrow (c) in Korollar 3.2.9, da dort von der Abelizität von G kein Gebrauch gemacht wird. Ebenso wird der vorausgesetzte Isomorphismus der Fundamentalgruppen nicht benutzt.

(b) \Rightarrow (a) Wir machen Induktion über die Gruppenordnung. Der Fall $\#G = 1$ ist trivial. Sei nun also $\#G > 1$. Da G eine ℓ -Gruppe ist, existiert eine exakte Sequenz $1 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 1$ mit $C \simeq \mathbb{Z}/\ell$ und $\#G > \#G'$. Nach Proposition 3.2.2(iv) existiert eine Galoisüberlagerung $f'' : \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ mit Gruppe G' und $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}'/C$. Nach Induktionsvoraussetzung ist f' in Y unverzweigt. Sei $f'' : \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}''$ die Galoisüberlagerung mit Gruppe C , s.d. $f = f'f''$. Dann ist für $x' \in (\mathcal{X}' \setminus f^{-1}(D))_1 \setminus f^{-1}(Y)$ der Restklassenkörper $\kappa(f''(x'))$ ein Zwischenkörper von $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ und also $\kappa(x')/\kappa(f''(x'))$ unverzweigt. Folglich erfüllt auch f'' die Aussage (b) mit f'' anstelle f und $Y'' = f^{-1}(Y)$ anstelle Y . Außerdem sind in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\overline{X'' \setminus f'^{-1}(D_\eta)})^{(p')} & \longrightarrow & \pi_1(\overline{X \setminus D_\eta})^{(p')} & \longrightarrow & \tilde{G}' \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1((\mathcal{X}'' \setminus f'^{-1}(D))^{sh})^{(p')} & \longrightarrow & \pi_1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh})^{(p')} & \longrightarrow & \tilde{G}' \longrightarrow 1 \end{array} \quad (3.5)$$

die Zeilen exakt und der mittlere und rechte, vertikale Pfeil Isomorphismen, sowie \tilde{G}' eine Untergruppe von G' . Also ist auch der rechte Pfeil ein Isomorphismus und wir können Korollar 3.2.10(b) mit f'' anwenden. Das zeigt Aussage (a). \square

Ein Divisor D auf $\mathcal{X} \rightarrow S$ heißt *fast etal über S* , falls seine irreduziblen Komponenten etal über S sind. Insbesondere ist ein über S fast etaler Divisor horizontal.

Satz 3.2.12. *Sei $\mathcal{X} \rightarrow S$ eine glatte, eigentliche, relative Kurve und $\ell \neq p = \text{ch}(\kappa(\zeta))$ eine Primzahl. Ferner sei D ein Divisor auf \mathcal{X} der einer der folgenden Bedingungen genügt:*

i) *D ist etal über S , oder*

ii) *D ist fast etal über S , $\mathcal{X} = \mathbb{P}_S^1$, $\kappa(\zeta)$ perfekt, und $\kappa(\eta)$ besitzt keine primitive ℓ -te Einheitswurzel.*

Dann ist $H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh}, \mathbb{Z}/\ell^n)^{\pi_1(S)} \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, \mathbb{Z}/\ell^n)^{\pi_1(\eta)}$ ein Epimorphismus für alle $n \geq 1$. Im ersten Fall gilt sogar allgemeiner $\pi_1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh})^{(p')} \simeq \pi_1(\overline{X \setminus D_\eta})^{(p')}$.

Beweis. Im ersten Fall ist die erste Aussage eine Konsequenz der zweiten, welche in [OV00] bewiesen ist. Gelte nun also ii). Dann gibt es einen nichtleeren Divisor $D_0 \subset D$, der etal über S ist. Setze $D_{1,\eta} = D_\eta - D_{0,\eta}$ und D_1 gleich den Abschluß von $D_{1,\eta}$ in \mathcal{X} . Da $\kappa(\eta)$ nach Voraussetzung keine primitive ℓ -te Einheitswurzel besitzt, liefert (2.3) für $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n$ und alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} H^1(\overline{X \setminus D_\eta}, \Lambda)^{G_k} &\simeq \bigoplus_{x \in D_\eta} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} \\ &\simeq \bigoplus_{x \in D_{0,\eta}} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} \times \bigoplus_{x \in D_{1,\eta}} \Lambda(-1)^{G_{\kappa(x)}} \\ &\simeq H^1(\overline{X \setminus D_{0,\eta}}, \Lambda)^{G_k} \times H^1(\overline{X \setminus D_{1,\eta}}, \Lambda)^{G_k}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Andererseits haben wir Basiswechseldiagramme

$$\begin{array}{ccccc} \overline{X \setminus D_{0,\eta}} & \xleftarrow{j_{0,\eta}} & \overline{X \setminus D_\eta} & \xrightarrow{j_{1,\eta}} & \overline{X \setminus D_{1,\eta}} \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota_1 \\ (\mathcal{X} \setminus D_0)^{sh} & \xleftarrow{j_0} & (\mathcal{X} \setminus D)^{sh} & \xrightarrow{j_1} & (\mathcal{X} \setminus D_1)^{sh}. \end{array}$$

Wir schreiben nun $H^1(\cdot)$ für $H^1(\cdot, \Lambda)$. Bezeichne K den Kokern des Homomorphismus $H^1((\mathcal{X} \setminus D_0)^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}} \rightarrow H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}}$. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{X}^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}} & \longrightarrow & H^1((\mathcal{X} \setminus D_1)^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}} & & & & \\ \downarrow & & \downarrow j_1^* & & & & \\ 1 \rightarrow H^1((\mathcal{X} \setminus D_0)^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}} & \rightarrow & H^1((\mathcal{X} \setminus D)^{sh})^{G_{\kappa(\zeta)}} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \iota_0^* & & \downarrow \iota^* & & \downarrow & & \\ 1 \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D_{0,\eta}})^{G_{\kappa(\eta)}} & \xrightarrow{j_{0,\eta}^*} & H^1(\overline{X \setminus D_\eta})^{G_{\kappa(\eta)}} & \xleftarrow{j_{1,\eta}^*} & H^1(\overline{X \setminus D_{1,\eta}})^{G_{\kappa(\eta)}} & \rightarrow & 1. \end{array}$$

Dabei folgt die Exaktheit der untersten Zeile aus (3.6). Wir machen Induktion über die Mächtigkeit von $(D_\eta)_0$. Nach Bedingung i) des Satzes ist ι_0^* ein Isomorphismus. Andererseits ist $sj_{1,\eta}^* = id$, und also $st^*j_1^* = sj_{1,\eta}^*\iota_1^* = \iota_1^*$. Nach Induktionsvoraussetzung ist ι_1^* surjektiv. Aus obigem Diagramm folgt daher, daß auch $K \rightarrow H^1(\overline{X \setminus D_{1,\eta}})^{G_{\kappa(\eta)}}$ surjektiv ist. Schließlich zeigt das 5er-Lemma die Surjektivität von ι^* . \square

Korollar 3.2.13. *Sei $\ell \neq p = \text{ch}(\kappa(\zeta))$ eine Primzahl und G eine endliche ℓ -Gruppe. Ferner seien \mathcal{X} glatt und D etal über S . Dann sind äquivalent:*

- (a) f ist in Y unverzweigt.
- (b) Für alle $x' \in X'_0$, so daß der Abschluß $\overline{\{x'\}} \subset \mathcal{X}$ disjunkt zu $f^{-1}(D)$ ist, ist die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ unverzweigt.

Man beachte, daß (a) \Rightarrow (b) auch ohne Voraussetzung an \mathcal{X} und D gilt.

Beweis. Satz 3.2.12 zusammen mit Korollar 3.2.11. \square

Als Gegenpol zu den bisherigen Aussagen beweisen wir noch

Proposition 3.2.14. *Seien $S = \text{Spec } R$, R ein vollständiger, diskreter Bewertungsring mit endlichem Restklassenkörper und $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine S -Galoisüberlagerung mit Gruppe G zwischen normalen, integren, relativen Kurven über S , sowie X, X' wie bisher. Ferner sei f in der speziellen Faser (genauer in ihren generischen Punkten) von \mathcal{X} als rein verzweigt und G als nicht notwendig abelsch vorausgesetzt. Ist f in einem abgeschlossenen Punkt $x' \in X'$ etal, so ist entweder $\kappa(x') = \kappa(f(x'))$ oder $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ rein verzweigt.*

Beweis. Bezeichne y' die Spezialisierung von x' . Nach dem Reinheitssatz von Zariski-Nagata ist jeder abgeschlossene Punkt einer irreduziblen Komponente Y' der speziellen Faser von \mathcal{X}' in f rein verzweigt. Nach Proposition 3.2.4(ii) ist $\kappa(y') = \kappa(f(y'))$. Andererseits ist $\overline{\{x'\}} = \text{Spec } A \subset \mathcal{X}'$ für eine Ordnung A von $\kappa(x')$ mit Restklassenkörper $\kappa(y')$. Bezeichne $\mathcal{O}_{\kappa(x')}$ die Maximalordnung von $\kappa(x')$. Dann ist der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_{\kappa(x')}$ gleich $\kappa(y')$. Denn bezeichne \mathcal{O}^{nr} die Maximalordnung der maximalen, unverzweigten Zwischenerweiterung von $\kappa(x')/\kappa(\eta)$. Als abelsche Gruppe hat A endlichen Index in $\mathcal{O}_{\kappa(x')}$ und folglich auch $A \cap \mathcal{O}^{nr}$ in \mathcal{O}^{nr} . Da wir eine Surjektion $\text{Spec } A \rightarrow S$ haben, gilt $R = \mathcal{O}_S \subset A \cap \mathcal{O}^{nr} \subset \mathcal{O}^{nr}$. Nun ist $\text{Spec}(A \cap \mathcal{O}^{nr}) \rightarrow S$ etal, also $A \cap \mathcal{O}^{nr}$ regulär, insbesondere ganzabgeschlossen und somit $A \cap \mathcal{O}^{nr} = \mathcal{O}^{nr}$, d.h. $\mathcal{O}^{nr} \subset A$. Da aber \mathcal{O}^{nr} und $\mathcal{O}_{\kappa(x')}$ bzw. \mathcal{O}^{nr} und A den selben Restklassenkörper haben, so auch A und $\mathcal{O}_{\kappa(x')}$. Daher zeigt $\kappa(y') = \kappa(f(y'))$, daß die Galoisgruppe von $\kappa(x')/\kappa(f(x'))$ gleich ihrer Trägheitsgruppe ist. \square

Abschließend geben wir jetzt eine Antwort auf die nach (3.4) gestellte Frage.

Proposition 3.2.15. *Sei S_k ein reguläres Modell eines globalen Körpers k , $S \subset S_k$ ein offenes Unterschema und ℓ eine auf S invertierbare Primzahl, so daß k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel besitzt. Außerdem sei $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ eine S -Galoisüberlagerung mit abelscher ℓ -Gruppe G und einem über S fast etalem Verzweigungsdivisor $D = D(f)$. Ferner sei $D_k = D \times_S k$ und $x \in \mathbb{P}_k^1 \setminus D_k$ ein abgeschlossener Punkt. Bezeichne $v \nmid \ell$ einen abgeschlossenen Punkt von S . Ist $\overline{\{x\}} \subset \mathbb{P}_S^1$ über v etal und $\overline{\{x\}} \times_S \kappa(v) \not\subset D \times_S \kappa(v)$, sowie für jedes Urbild $x' \in f^{-1}(x)$ die Stelle v in $\kappa(x')/\kappa(x)$ unverzweigt, so ist f entlang der Faser über v unverzweigt.*

Beweis. Sei $S_v = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{S,v}$. Es existiert ein $x_v \in x \times_k k_v$ mit $\overline{\{x_v\}} \cap D_v = \emptyset$, wo $D_v = D \times_S S_v$. Da $S_v \rightarrow S$ ein flacher Morphismus ist, können wir wegen Proposition 3.2.2(vi) und [EGA IV, 17.7.1(ii)] oder Proposition 3.2.6 o.E. S als lokal und vollständig voraussetzen. Nach Satz 3.2.12 ii) können wir Korollar 3.2.10 (c) auf x_v anwenden und die Behauptung folgt. \square

3.3 Scholzüberlagerungen

Ein Schemamorphismus $X \xrightarrow{f} S$ heißt *zusammenhängend*, falls für alle $s \in S$ die Faser $f^{-1}(s)$ geometrisch zusammenhängend ist (vgl. [EGA IV, 4.5.5]). Sei nun S ein noethersches, integres Schema mit generischem Punkt η und f ein flacher, eigentlicher Morphismus von endlicher Präsentation mit geometrisch reduzierten Fasern. Dann ist f genau dann zusammenhängend, wenn die generische Faser $X_\eta \rightarrow \eta$ es ist [EGA IV, 15.5.9(ii)].

Sei S wie eben und $f : X' \rightarrow X$ eine S -Überlagerung (d.h. f ist ein S -Morphismus und eine Überlagerung von X). Wir sagen f ist eine *geometrische S -Überlagerung*, falls die generische Faser $X'_\eta \rightarrow \eta$ geometrisch zusammenhängend ist. Notwendigerweise ist auch $X_\eta \rightarrow \eta$ geometrisch zusammenhängend [EGA IV, 4.5.4]. Ist f sogar eine G -Galoisüberlagerung, so bedeutet das, daß die Komposition $\pi_1(\overline{X}_\eta) \hookrightarrow \pi_1(X_\eta) \rightarrow G$ surjektiv ist. In diesem Fall sagen wir, f sei eine *geometrische Galoisüberlagerung*. Ist insbesondere S ein reguläres Modell eines globalen Körpers, so ist eine S -Überlagerung zwischen flachen, eigentlichen, relativen Kurven über S genau dann geometrisch, wenn sie zusammenhängend ist [EGA IV, 4.6.3].

Wir kommen nun zu der zentralen

Definition 3.3.1. Sei S ein integres, noethersches Schema, ℓ eine Primzahl und n eine positive, ganze Zahl. Eine geometrische S -Galoisüberlagerung $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ von ℓ -Potenzgrad zwischen normalen, noetherschen S -Schemata heißt eine *ℓ^n -Scholzüberlagerung* (oder kurz: *ℓ^n -scholz*), falls die beiden folgenden Bedingungen gelten:

- (i) der Verzweigungsdivisor \mathcal{D} von f auf \mathcal{X} ist ein ℓ^n -Scholzdivisor, und
- (ii) f ist in jedem generischen Punkt von \mathcal{D} rein zahm verzweigt (s. §3.2).

Bemerkung 3.3.2. Diese Definition verallgemeinert den klassischen Begriff der Scholzerweiterung globaler Körper [GJ98, Ser92]. Läßt man nämlich in der Definition die Forderung, daß die Überlagerung geometrisch ist, fallen und setzt $S = \mathcal{X} = \text{Spec } \mathcal{O}_k$, wo \mathcal{O}_k der Ganzheitsring eines Zahlkörpers k ist, so stimmt diese mit der klassischen Definition für Scholzerweiterungen von k überein; vgl. [Ser92, Def. 2.1.2]. Wählt man andererseits für \mathcal{X} ein glattes Modell eines globalen Funktionenkörper K , für S das Spektrum des Konstantenkörpers und für \mathcal{X}' die Normalisierung von \mathcal{X} in einer Galoiserweiterung L/K , so ist L/K genau dann eine reguläre Scholzerweiterung, wenn $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine Scholzüberlagerung im Sinne obiger Definition ist.

Sei k ein globaler Körper und S_k ein reguläres Modell von k , sowie S ein Unterschema von S_k . Der für uns interessanteste Fall einer Scholzüberlagerung ist der, daß \mathcal{X} eine relative Kurve über S mit glatter, geometrisch zusammenhängender generischer Faser X/k ist. In dieser Situation machen wir die

Definition 3.3.3. Ein geometrische Galoisüberlagerung $X' \rightarrow X$ von ℓ -Potenzgrad heißt eine *ℓ^n -Scholzüberlagerung über S* (oder kurz: *ℓ^n -scholz über S*), falls es eine endliche ℓ -reguläre Stellenmenge (Definition 1.3.1) $T \subsetneq S$ und ein reguläres Modell

\mathcal{X} von X über $S' = S \setminus T$ gibt, so daß $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine ℓ^n -Scholzüberlagerung im Sinne von Definition 3.3.1 ist, wobei \mathcal{X}' die Normalisierung von \mathcal{X} im Funktionenkörper von X' bezeichnet. (Man beachte, $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ist nach Proposition 3.2.3 eine geometrische Galoisüberlagerung.) T heißt die *Ausnahmemenge* der Scholzüberlagerung.

Wir denken uns im folgenden zu jeder Scholzüberlagerung $f : X' \rightarrow X$ über S eine ℓ -reguläre Stellenmenge $T \subset S$ und ein reguläres Modell \mathcal{X} über $S \setminus T$ fixiert. Wir sagen f ist nur horizontal verzweigt, falls der Verzweigungsdivisor D von $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ auf \mathcal{X} keine vertikalen Komponenten besitzt; also $D = D_{\text{hor}}$ gilt.

Ist S das Spektrum eines Körpers, und X/S eine glatte Kurve, so stimmt diese Definition mit 3.3.1 überein. Insbesondere ist der für uns wichtige Fall einer glatten Kurve über einem endlichen Körper eingeschlossen (s.a. Bemerkung 3.3.2). Überhaupt wenden wir Definition 3.3.3 nur in drei Fällen an, nämlich $S = S_k$, $S = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{S,v}$ oder $S = \text{Spec } \kappa(v)$ für einen abgeschlossenen Punkt v in S_k .

Proposition 3.3.4. *Sei $S \subset S_k$ ein offenes Unterschema, k ein globaler Körper wie oben und $f_\eta : X' \rightarrow X$ eine geometrische Galoisüberlagerung, T , \mathcal{X} und \mathcal{X}' wie in Definition 3.3.3. Bezeichne \mathcal{D} den Verzweigungsdivisor von $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ auf \mathcal{X} . Die speziellen Fasern von \mathcal{X} bzw. \mathcal{X}' über einem abgeschlossenen Punkt v von S seien mit Y_v bzw. Y'_v bezeichnet. Wir betrachten die Aussagen:*

- (a) $f_\eta : X' \rightarrow X$ ist eine ℓ^n -Scholzüberlagerung,
- (b) $f_v : X'_v \rightarrow X_v$ ist eine ℓ^n -Scholzüberlagerung,
- (c) $\overline{f}_v : Y'_v \rightarrow Y_v$ ist eine ℓ^n -Scholzüberlagerung.

Dann gilt (a) \Rightarrow (b). Sei nun \mathcal{D} etal über v . Ist Y_v regulär, ℓ auf Y_v invertierbar und f über v nur horizontal verzweigt, so gilt (b) \Leftrightarrow (c).

Beweis. (a) \Rightarrow (b) Da $\text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{S,v} \rightarrow S$ flach ist, folgt die Aussage sofort aus Proposition 3.2.2(vi) und Proposition 3.2.6.

(b) \Leftrightarrow (c) Setze $\mathcal{D}_v = \mathcal{D} \times_S \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{S,v}$ und $D_v = \mathcal{D}_v \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{S,v}} \kappa(v)$. Dann ist \mathcal{D}_v genau dann ein ℓ^n -Scholzdivisor, falls D_v ein solcher ist. Die eine Richtung folgt wegen der Invertierbarkeit von ℓ aus Lemma 3.1.5, die Rückrichtung mittels Hensels Lemma, da \mathcal{D}_v Vereinigung von henselschen Ringen ist.

Bezeichne U_v die generische Faser von $\mathcal{U}_v = \mathcal{X}_v \setminus \mathcal{D}_v$. Da \mathcal{D} über v etal ist, gilt für $V_v := \mathcal{U}_v \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{S,v}} \kappa(v)$

$$\pi_1^{(p')}(\overline{U}_v) \simeq \pi_1^{(p')}(\mathcal{U}_v \times_S S^{sh}) \simeq \pi_1^{(p')}(\overline{V}_v) \quad (3.7)$$

nach [OV00]. Das zeigt, daß eine geometrische Überlagerung (von p -fremden Grad) von X_v genau dann außerhalb von U_v zahm verzweigt ist, falls die induzierte Überlagerung von Y_v außerhalb von V_v zahm verzweigt ist. (Denn ein Punkt von X_v ist genau dann unverzweigt, wenn alle Urbilder in \overline{X}_v in der induzierten Überlagerung

unverzweigt sind.) Genauer ist ein Punkt $\notin U_v$ genau dann verzweigt, falls seine Spezialisierung verzweigt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß ein Punkt $\notin U_v$ in einer Zwischenüberlagerung von $X'_v \rightarrow X_v$ genau dann voll zerlegt ist, falls der reduzierte Punkt in der reduzierten Zwischenüberlagerung von $Y'_v \rightarrow Y_v$ voll zerlegt ist. Denn sei $x \in (X_v)_0$ ein abgeschlossener Punkt, der in einer Zwischenüberlagerung $f''_v : X''_v \rightarrow X_v$ voll zerlegt ist und x'' ein Punkt über x . Bezeichne y bzw. y'' die Spezialisierung von x bzw. x'' . Da nach dem bereits Gesagten mit x auch die reduzierte Überlagerung in y nicht verzweigt, ist f entlang $\{x\}^c \subset \mathcal{X}$ étal. Folglich ist $\kappa(x'')/\kappa(x)$ eine unverzweigte Körpererweiterung (vgl. Beweis für $(a) \Rightarrow (c)$ von Korollar 3.2.9) und insbesondere gilt $[\kappa(x'') : \kappa(x)] = [\kappa(y'') : \kappa(y)]$. Somit ist x genau dann voll zerlegt, falls das für y der Fall ist.

Damit ist $(b) \Leftrightarrow (c)$ gezeigt. □

Bemerkung 3.3.5. Falls X'_v gute Reduktion besitzt und v ein gewöhnlicher Punkt ist, kann man auf (3.7) verzichten. Nach Voraussetzung an \mathcal{D}' und Lemma 2.1.6 ist v ein gewöhnlicher Punkt für jede Zwischenüberlagerung X_i von $X'_v \rightarrow X_v$. Sei $U_i = X_i \times_{X_v} X'_v$ mit Reduktion V_i . Dann haben wir für alle $0 \leq i \leq n$ Isomorphismen

$$\pi_1^{\text{ab}}(\overline{U}_i)/\ell \simeq \pi_1^{\text{ab}}(\overline{V}_i)/\ell.$$

Die Richtung $(b) \Rightarrow (a)$ ist im allgemeinen falsch (vgl. Bemerkung 3.2.7). Während der Verzweigungsgrad lokal und global in allen verzweigten Punkten übereinstimmt, kann global in den verzweigten Punkten ein Restklassenkörpergrad auftreten, der durch Übergang zur lokalen Überlagerung $X'_v \rightarrow X_v$ aufgezehrt wird.

Ergänzung 3.3.6. *In der Situation von 3.3.4 gelte zusätzlich: ist Z eine beliebige Zwischenüberlagerung von $X' \rightarrow X$, (d.h. es existieren Morphismen $X' \rightarrow Z \rightarrow X$, deren Komposition gleich f_η ist) und ist $x_v \in (\Delta_v)_0$ in $Z_v \rightarrow X_v$ voll zerlegt, so ist schon x in $Z \rightarrow X$ voll zerlegt, wobei x das Bild von x_v unter der Projektion $X_v \rightarrow X$ bezeichnet.*

Dann gilt $(a) \Leftrightarrow (b)$, falls f über S nur horizontal verzweigt ist.

Beweis. Das Beweis lehnt sich an den für $(b) \Leftrightarrow (c)$ an. Sei $\Delta = \mathcal{D} \times_X X$ und $\Delta_v = \Delta \otimes_k k_v$. Wir betrachten wieder die Folge $X'_v = X_{v,n} \rightarrow X_{v,n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{v,1} \rightarrow X_{v,0} = X_v$ von \mathbb{Z}/ℓ -Überlagerungen $X_{v,i} \rightarrow X_{v,i-1}$ zwischen normalen, eigentlichen Schemata für $0 < i \leq n$. Entsprechend hat man auch eine Folge $X' = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = X_v$ von \mathbb{Z}/ℓ -Überlagerungen $X_i \rightarrow X_{i-1}$ zwischen normalen, eigentlichen Schemata für $0 < i \leq n$. Setze $U_i = X_i \times_X U$ bzw. $U_{v,i} = X_{v,i} \times_X U_v$. Da der generische Punkt gewöhnlich ist, gilt

$$\pi_1^{\text{ab}}(U_i) \simeq \pi_1^{\text{ab}}(U_{v,i}).$$

Das zeigt, daß ein Punkt $x_v \in X_v$ genau dann in einer Zwischenüberlagerung von $X'_v \rightarrow X_v$ verzweigt, falls sein Bildpunkt $x \in X$ in der entsprechenden Zwischenüberlagerung von $X' \rightarrow X$ verzweigt. (Da die Galoisüberlagerung geometrisch ist, gibt

es eine Bijektion zwischen den Zwischenüberlagerungen von $X' \rightarrow X$ und den von $X'_v \rightarrow X_v$.

Da nach Voraussetzung Punkte $x \in X$, für die ein (und damit jeder) Punkt $x_v \in X_v$ über x in einer gegebenen Zwischenüberlagerung $Z_v \rightarrow X_v$ vollständig zerlegt ist, selbst schon in $Z \rightarrow X$ vollständig zerlegt sind, folgt $(b) \Rightarrow (a)$. \square

Konvention: Ist $f : X' \rightarrow X$ eine Scholzüberlagerung über $\tilde{S} \subseteq S$ und $X = \mathbb{P}_k^1$, so sei immer $\mathcal{X} = \mathbb{P}_{\tilde{S}}^1$ als gewählt angenommen.

4 Einbettungsprobleme

Wir wiederholen zunächst einige allgemeine Tatsachen aus der Theorie der Einbettungsprobleme und definieren anschließend den Begriff des Scholzproblems.

4.1 Definition

Sei Π eine proendliche Gruppe.

Definition 4.1.1. (i) Ein *Einbettungsproblem* $\mathcal{E}(\Pi) = \mathcal{E}(\Pi, \rho, \alpha)$ für die Gruppe Π ist ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \Pi \\ & & \downarrow \rho \\ E & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

mit proendlichen Gruppen G und E und epimorphen Pfeilen ρ und α .

(ii) Eine *Lösung* eines Einbettungsproblems $\mathcal{E}(\Pi)$ ist ein Homomorphismus $\psi : \Pi \rightarrow E$, so daß $\alpha \circ \psi = \rho$ gilt. Eine Lösung heißt *eigentlich*, falls ψ surjektiv ist.

Der Begriff des Einbettungsproblems ist „funktoriell“ für Homomorphismen $\phi : \Pi' \rightarrow \Pi$. Denn ist $\mathcal{E}(\Pi)$ ein Einbettungsproblem für Π , so induziert ϕ ein Einbettungsproblem $\phi^*\mathcal{E}(\Pi)$ für Π' , nämlich $\phi^*\mathcal{E}(\Pi) = (\phi^*\mathcal{E})(\Pi', \rho \circ \phi, \alpha')$, wo $E' := \alpha^{-1}(\text{im}(\rho \circ \phi))$ und $\alpha' := \alpha|_{E'}$. Ist andererseits $\mathcal{E}'(\Pi') = \mathcal{E}'(\Pi', \rho', \alpha')$ ein Einbettungsproblem für Π' und besitzt ρ' eine Faktorisierung $\rho' = \rho \circ \phi$ mit einem Epimorphismus $\rho : \Pi \rightarrow G$, so induziert ϕ ein Einbettungsproblem $\phi_*\mathcal{E}'(\Pi')$ für Π , nämlich $\phi_*\mathcal{E}'(\Pi') = (\phi_*\mathcal{E}')(\Pi, \rho, \alpha')$. Offensichtlich gilt $\phi^*\phi_* = id$, und $\phi_*\phi^* = id$, falls $\rho \circ \phi$ surjektiv ist. Ferner impliziert jede Lösung von $\mathcal{E}(\Pi)$ auch eine Lösung von $\phi^*\mathcal{E}(\Pi)$ und umgekehrt, falls die Lösung über ϕ faktorisiert.

Wir sind vor allem an Einbettungsproblemen für $\Pi = \pi_1(X)$, X ein Schema, interessiert. Sei insbesondere k ein globaler Körper und X ein k -Schema. Die kanonische Projektion $X_v \rightarrow X$ induziert einen Homomorphismus $\phi_v : \pi_1(X_v) \rightarrow \pi_1(X)$. Sei nun $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\pi_1(X))$ ein Einbettungsproblem für $\pi_1(X)$. Wir nennen das durch ϕ_v induzierte Problem $\phi_v^*\mathcal{E}(\pi_1(X))$ die *Lokalisierung von \mathcal{E} an der Stelle v von k* , oder auch kurz ein *lokales Einbettungsproblem*.

Schließlich definieren wir noch den *Kern* eines Einbettungsproblems $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Pi, \rho, \alpha)$ als $\text{Kern } \mathcal{E} := \text{Kern } \alpha$. Wir sprechen dann von einem Einbettungsproblem mit abelschem, einfachem (etc.) Kern, falls $\text{Kern } \mathcal{E}$ die entsprechende Eigenschaft besitzt. Ferner nennen wir \mathcal{E} *zentral* bzw. *zerfallend*, falls die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow \text{Kern } \mathcal{E} \rightarrow E \xrightarrow{\alpha} G \rightarrow 1 \quad (4.1)$$

die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Sei S ein noethersches, integres Schema und X ein S -Schema. Ein Einbettungsproblem $\mathcal{E}(\pi_1(X)) = \mathcal{E}(\pi_1(X), \rho, \alpha)$ heißt *geometrisch*, falls $\text{im}(\rho)$ die Automorphismengruppe einer geometrischen S -Galoisüberlagerung $X' \rightarrow X$ ist (§3.3). Eine *geometrische Lösung* eines geometrischen Problems $\mathcal{E}(\pi_1(X))$ ist eine Lösung ψ , so daß auch $\text{im}(\psi)$ eine geometrische Überlagerung beschreibt.

Abkürzend schreiben wir $\mathcal{E}(X)$ für $\mathcal{E}(\pi_1(X))$.

4.2 Lösungskriterien

Sei $\mathcal{E}(\Pi) = \mathcal{E}(\Pi, \rho, \alpha)$ ein Einbettungsproblem mit abelschem Kern C . Dann definiert die kurze exakte Sequenz (4.1) eine Kohomologiekategorie $\varepsilon \in H^2(G, C)$ und es gilt die fundamentale [Hoe68]

Proposition 4.2.1. *Das Einbettungsproblem $\mathcal{E}(\Pi)$ besitzt genau dann eine Lösung, falls $\rho^*(\varepsilon) = 0$ gilt, wo $\rho^* : H^2(G, C) \rightarrow H^2(\Pi, C)$ die von ρ induzierte Abbildung ist.*

Die Proposition macht allerdings keine Aussagen über die Existenz eigentlicher Lösungen. In einigen Fällen ergibt sich die Eigentlichkeit einer Lösung aber zwangsläufig.

Lemma 4.2.2. *Sei \mathcal{E} ein nichtzerfallendes, zentrales Einbettungsproblem mit einfachem Kern. Dann ist jede Lösung von \mathcal{E} bereits eigentlich.*

Beweis. Sei $\psi : \Pi \rightarrow E$ eine Lösung. Dann gibt es im Bild von ψ ein nichttriviales Element $e \in E$, das im Kern von α liegt. Andernfalls enthielte E eine zu G isomorphe Untergruppe und \mathcal{E} wäre folglich zerfallend, ganz im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt bereits die Behauptung, denn mit e liegt auch die davon erzeugte Untergruppe im Kern. Letzterer ist nach Voraussetzung abelsch und einfach, besitzt also keine echten Untergruppen. Folglich erzeugt e schon den ganzen Kern. \square

Ferner gilt

Lemma 4.2.3. *Sei k ein Körper und X ein integres k -Schema. Für jedes nichtzerfallende, geometrische Einbettungsproblem $\mathcal{E}(X)$ mit einfachem Kern sind alle eigentlichen Lösungen geometrisch.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine nicht-geometrische Lösung. Da die Lösung eigentlich ist, gehört zu ihr ein Überlagerungsturm $X'' \rightarrow X' \rightarrow X$ mit X' geometrisch zusammenhängend, X'' nicht geometrisch zusammenhängend und $\text{Aut}(X''/X') \simeq \text{Kern } \mathcal{E}$. Bezeichne $k(X)$, usw. den Funktionenkörper von X , usw., und \tilde{k} den algebraischen Abschluß von k in $k(X'')$. Da k in $k(X')$ algebraisch abgeschlossen ist, sind \tilde{k} und $k(X')$ über k linear disjunkt. Folglich ist $k(X'') \simeq k(X') \otimes_k \tilde{k}$, also $\text{Aut}(X''/X) \simeq \text{Aut}(X'/X) \times \text{Aut}(X''/X')$, und das Einbettungsproblem ist im Widerspruch zur Annahme zerfallend. \square

Zusammenfassend erhalten wir

Korollar 4.2.4. *Sei k ein Körper, X ein integrales k -Schema und $\mathcal{E}(X) = (\pi_1(X), \rho, \alpha)$ ein nichtzerfallendes, geometrisches, zentrales Einbettungsproblem mit einfachem Kern. Dann besitzt $\mathcal{E}(X)$ eine eigentliche, geometrische Lösung, falls $\rho^*(\varepsilon) = 0$ gilt.*

Wir betrachten nun zerfallende Einbettungsprobleme.

Proposition 4.2.5. *Sei K ein Körper von endlichem Typ. Jedes (geometrische) zerfallende, zentrale Einbettungsproblem $\mathcal{E}(K)$ mit einfachem Kern besitzt eine eigentliche (geometrische) Lösung.*

Beweis. Bezeichne C den Kern von $\mathcal{E}(K)$, ℓ die Ordnung von C und r den ℓ -Rang des maximalen elementar-abelschen Quotienten von $G = \text{im } \rho$. O.E. ist K unendlich. Dann ist K hilbertsch [FJ86, Prop. 12.10] und nach Saltman [Sal82] existiert eine reguläre Galoiserweiterung L/K mit $\text{Gal}(L/K) = C^{r+1}$. Bezeichne M den Fixkörper von Kern ρ , also M/K galoissch mit Gruppe G . Nach Konstruktion besitzt L einen zu M über K linear disjunkten Zwischenkörper \tilde{L} mit Galoisgruppe C . (Alle Operationen seien in einem festen algebraischen Abschluß von K , der M enthält, ausgeführt.) Das Kompositum $\tilde{L}M$ ist dann eine Galoiserweiterung von K mit Galoisgruppe $C \times G$ und nach Voraussetzung isomorph zu E . \square

4.3 Scholzprobleme

Bezeichne \mathbb{k} entweder einen globalen, lokalen oder endlichen Körper und $S_{\mathbb{k}}$ im jeweiligen Fall entweder ein reguläres Modell von \mathbb{k} , $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{k}}$, wo $\mathcal{O}_{\mathbb{k}}$ für den Ganzheitsring des lokalen Körpers \mathbb{k} steht, oder $\text{Spec } \mathbb{k}$. Bezeichne S ein reduziertes, offenes Unterschema von $S_{\mathbb{k}}$.

Als reguläres Modell von $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ über S sei \mathbb{P}_S^1 fixiert. Sei nun $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ eine Galoisüberlagerung. Dann liefert die Normalisierung \mathcal{Y} von \mathbb{P}_S^1 im Funktionenkörper von Y eine Galoisüberlagerung $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ mit $\mathcal{Y} \times_{\mathbb{P}_S^1} \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 = Y$, die Ausdehnung entlang S . Auf diese Weise sei im folgenden jeder Überlagerung von $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ automatisch schon immer ihre Ausdehnung auf \mathbb{P}_S^1 beigelegt. Sind die entsprechenden Verzweigungsdivisoren mit Δ bzw. D bezeichnet, so haben wir eine Zerlegung $D = D_{\text{hor}} + D_{\text{ver}}$ (3.3), und es gilt $\Delta = D_{\text{hor}} \times_{\mathbb{P}_S^1} \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$.

Bezeichne nun Δ ein reduziertes, abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$.

Definition 4.3.1. Sei n eine positive, ganze Zahl und ℓ eine Primzahl. Ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{k}, \Delta)$ für Δ über $S_{\mathbb{k}}$ ist ein Einbettungsproblem $\mathcal{E}(\pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \setminus \Delta), \rho, \alpha)$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) die Ausdehnung, der durch $\rho : \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \setminus \Delta) \rightarrow G$ beschriebenen Überlagerung, auf $\mathbb{P}_{S_{\mathbb{k}}}^1$ ist eine ℓ^n -Scholzüberlagerung,
- (2) $\alpha : E \rightarrow G$ ist ein Epimorphismus von endlichen ℓ -Gruppen,
- (3) Kern α ist zentral in E und von Ordnung ℓ , und

(4) der Exponent von E ist kleiner oder gleich ℓ^n .

Die Ausnahmemenge $T \subset S_{\mathbb{k}}$ der Ausdehnung von ρ heißt die *Ausnahmemenge von* $\mathcal{S}(\mathbb{k}, \Delta)$. Eine *Scholzlösung* von $\mathcal{S}(\mathbb{k}, \Delta)$ ist eine eigentliche, geometrische Lösung von \mathcal{E} , deren Ausdehnung eine ℓ^n -Scholzüberlagerung von $\mathbb{P}_{S_{\mathbb{k}}}^1$ mit Ausnahmemenge T beschreibt.

Ergibt sich der Körper \mathbb{k} aus dem Kontext, so schreiben wir $\mathcal{S}(\Delta)$ anstelle $\mathcal{S}(\mathbb{k}, \Delta)$. Nach Definition ist ein Scholzproblem ein geometrisches Einbettungsproblem. Die Diskussion in §4.2 zeigt, daß ein nichtzerfallendes Scholzproblem genau dann eine eigentliche, geometrische Lösung besitzt, falls $\rho^*(\varepsilon) = 0$ gilt. Die Existenz von Scholzlösungen läßt sich nicht so leicht entscheiden.

Ferner sind Scholzprobleme mit Lokalisierung verträglich; es gilt nämlich

Lemma 4.3.2. *Sei k ein globaler Körper, $\mathcal{S}(k, \Delta)$ ein ℓ^n -Scholzproblem mit Ausnahmemenge T und $v \notin T$ eine Stelle von k . Dann ist die Lokalisierung $\mathcal{S}(k_v, \Delta_v)$ von $\mathcal{S}(k, \Delta)$ wieder ein ℓ^n -Scholzproblem.*

Beweis. Das folgt aus der Definition von $\mathcal{E}(\mathbb{P}_{k_v}^1 \setminus \Delta_v)$ und Proposition 3.3.4. \square

Der Funktionenkörper von $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ sei mit K bezeichnet. Dann induziert jedes ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{k}, \Delta)$ mittels des Epimorphismus $G_K \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \setminus \Delta)$ ein Einbettungsproblem für G_K . Dieses bezeichnen wir trotz des Notationsmißbrauchs mit $\mathcal{S}(G_K)$, um zu betonen, daß die zu dem Einbettungsproblem gehörige Überlagerung eine Scholzüberlagerung ist.

5 Scholzprobleme über verschiedenen Grundkörpern

Wir wollen nun die Lösbarkeit und spezieller die Existenz von Scholzlösungen für Scholzprobleme mit lokalem oder endlichem Grundkörper untersuchen. Letzterer Fall ist mittlerweile klassisch und geht im wesentlichen auf Scholz zurück. Wir zeigen, daß sich die Argumente aus dem Fall eines endlichen Grundkörpers auf den Fall eines lokalen Grundkörpers verallgemeinern lassen. Aus diesem Grund geben wir hier eine Darstellung des klassischen Falls, die diese Parallelen verdeutlicht. Schließlich geben wir Bedingungen für die Existenz von Scholzlösungen bei lokalem Grundkörper an.

5.1 Scholzprobleme über endlichen Körpern

Bezeichne \mathbb{F} einen endlichen Körper der Charakteristik p und k den Funktionenkörper von $X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$. Sei Δ ein reduziertes, abgeschlossenes Unterschema von X . Wir betrachten ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \pi_1(X \setminus \Delta) & & \\ & & & & \downarrow \rho & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & G & \longrightarrow & 1. \end{array} \quad (5.1)$$

Für jeden Divisor $\Delta' \supseteq \Delta$ auf X bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta')$ das durch $\pi_1(X \setminus \Delta') \rightarrow \pi_1(X \setminus \Delta)$ induzierte Scholzproblem.

Dann gilt

Proposition 5.1.1. *Enthält k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel, so besitzt jedes nichtzerfallende ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta)$ eine eigentliche, geometrische Lösung.*

Besitzt k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel und ist $s : \text{Spec } \mathbb{F} \rightarrow X \setminus \Delta$ ein Schnitt, $x_0 = s(\text{Spec } \mathbb{F})$, so besitzt noch das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta \cup \{x_0\})$ eine eigentliche, geometrische Lösung.

Beweis. Sei $\tilde{\Delta} = \Delta \cup \{x_0\}$, falls k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält und $\tilde{\Delta} = \Delta$ andernfalls. Wir zeigen zuerst, daß das durch $\text{Spec } k \hookrightarrow X \setminus \Delta$ induzierte Einbettungsproblem $\mathcal{S}(k)$ eine Lösung besitzt, und dann, daß $\mathcal{S}(k)$ auch eine solche Lösung besitzt, die über $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})$ faktorisiert.

Wir betrachten $\mathcal{S}(k)$. Nach Korollar 4.2.4 reicht es $\rho^*(\varepsilon) = 0$ in $H^2(k, C)$ zu zeigen. Wegen $\text{cd}_p G_k(p) = 1$ [Ser94] sei o.E. $\ell \neq p = \text{ch}(k)$. Andererseits reicht es nach dem klassischen Hasseprinzip [NSW00, 9.1.8], die durch $\text{Spec } k_v \rightarrow \text{Spec } k$ induzierten Einbettungsprobleme zu lösen. Solch ein lokales (scholzisches) Einbettungsproblem liest sich dann wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G_{k_v} & & \\ & & & & \downarrow \rho_v & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E_v & \xrightarrow{\alpha_v} & G_v & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

wobei G_v die Zerlegungsgruppe einer Fortsetzung von v in G ist. Bezeichne I_v die absolute Trägheitsgruppe in G_{k_v} . Für diejenigen Stellen v , an denen das lokale Einbettungsproblem nicht zerfällt, unterscheiden wir zwei Fälle:

- i) $\rho_v(I_v) = 1$: Dann faktorisiert ρ_v über $G_{k_v}/I_v \simeq \hat{\mathbb{Z}}$ und besitzt offensichtlich eine Liftung nach E_v .
- ii) $\rho_v(I_v) = G_v$: Sei $k'_w = (\overline{k_v})^{\text{Kern } \rho_v}$. Dann ist $k'_w \simeq k_v(\sqrt[m]{t})$ für ein $m > 0$ und eine Uniformisierende t von k_v . Wegen der Scholzbedingung (Definition 4.3.1(3)+(4)) enthält k_v eine primitive ℓ^n -te Einheitswurzel, und es gilt $m < n$. Also ist $k_v(\sqrt[m]{t})/k_v$ eine Galoiserweiterung mit Gruppe E_v , die gesuchte Lösung.

Das zeigt die Existenz einer Lösung ψ .

Es bleibt zu zeigen, daß sich ψ zu einer Lösung $\tilde{\psi}$, die über $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta})$ faktorisiert, abändern läßt. Sei $v \in \text{Ram}(\psi) \setminus \Delta$. Dann ist $\rho(I_v) = 1$, also induziert ψ eine Abbildung $\psi|_{I_v} : I_v \rightarrow C \simeq \mathbb{Z}/\ell$. Folglich reicht es eine Abbildung $\vartheta : \pi_1(X \setminus (\text{Ram}(\psi) \cup \tilde{\Delta})) \rightarrow C$ mit $\vartheta|_{I_v} = \psi|_{I_v}$ für $v \in \text{Ram}(\psi) \setminus \Delta$ zu konstruieren. Denn, da C abelsch ist, ist $\vartheta^{-1}\psi$ ein Homomorphismus, und es gilt $\vartheta^{-1}\psi|_{I_v} = \vartheta^{-1}|_{I_v} \cdot \psi|_{I_v} = 1$ und somit $\text{Ram}(\vartheta^{-1}\psi) \subseteq \tilde{\Delta}$. Folglich ist $\tilde{\psi} = \vartheta^{-1}\psi$ eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften. Die Existenz von ϑ folgt für $\Sigma = \text{Ram}(\psi) \setminus \Delta$ und v_0 die zum Punkt x_0 gehörige Stelle aus dem folgenden Lemma 5.1.2. \square

Lemma 5.1.2. *Sei ℓ eine ungerade Primzahl und entweder $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_q(t)$ mit $\text{ch}(k) \neq \ell$. Bezeichne Σ eine endliche Stellenmenge von k (mit $\Sigma \cap \Sigma_\infty = \emptyset$ für $k = \mathbb{Q}$). Ist $k = \mathbb{F}_q(t)$ und $\ell | (q-1)$, so setzen wir $\Sigma' = \Sigma \cup \{v_0\}$ mit einer beliebigen Primstelle v_0 vom Grad 1, ansonsten sei $\Sigma' = \Sigma$. Dann gibt es eine Surjektion*

$$H^1(k_{\Sigma'}/k, \mathbb{Z}/\ell) \twoheadrightarrow \bigoplus_{\Sigma} H^1(I_v, \mathbb{Z}/\ell),$$

wobei I_v die absolute Trägheitsgruppe von v in G_k bezeichnet.

Beweis. Sei zunächst k ein globaler Körper k mit Ganzheitsring \mathcal{O}_k und im Funktorenkörperfall ∞ eine Primstelle vom Grad 1, der sog. unendlich ferne Punkt. Weiter bezeichne U_v^i für eine Stelle v von k und $i \geq 0$ die i -te Einseinheitengruppe von k_v . Ein Erklärungsmodul $m = (m(v))_v$ für k ist eine Zuordnung einer nicht-negativen, ganzen Zahl $m(v)$ zu jeder Stelle v von k , so daß fast alle $m(v)$ gleich Null sind. Die ideltheoretische Fassung der Strahlklassengruppe zum Modul m läßt sich beschreiben durch das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1(\mathcal{O}_k) & \longrightarrow & K_1(k) & \longrightarrow & \bigoplus_{v|\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{O}_k) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_v U_v^0/U_v^{m(v)} & \longrightarrow & \bigoplus_v K_1(k_v)/U_v^{m(v)} & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Q_m & \longrightarrow & C_m(k) & \longrightarrow & \bigoplus_{v|\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \tag{5.2}$$

Sei nun k wie im Lemma. Dann ist $\text{Pic}(\mathcal{O}_k) = 1$ und

$$K_1(\mathcal{O}_k)/\ell \simeq \mu_\ell(k).$$

Letztere Aussage folgt für $k = \mathbb{Q}$ aus Dirichlets Einheitsatz und im Funkti-
onkörperfall ($k = \mathbb{F}_q(t)$) nach Quillen aus

$$K_1(\mathcal{O}_k)/\ell \simeq K_1(\mathbb{F}_q)/\ell \simeq \mathbb{Z}/(q-1) \otimes \mathbb{Z}/\ell \simeq \mu_\ell(k).$$

Enthält k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel, so ist folglich $\text{Hom}(K_1(\mathcal{O}_k), \mathbb{Z}/\ell) \simeq (K_1(\mathcal{O}_k)/\ell)^* = 0$. Andernfalls ist nach Voraussetzung $k = \mathbb{F}_q(t)$ und v_0 eine Primstelle vom Grad 1. Dann gilt $\text{Hom}(K_1(\mathcal{O}_k), \mathbb{Z}/\ell) = \text{Hom}(K_1(\mathbb{F}_q), \mathbb{Z}/\ell) = \text{Hom}(U_{v_0}^0/U_{v_0}^1, \mathbb{Z}/\ell)$. Bezeichne nun m einen Modul mit Träger Σ' , d.h. $m(x) = 0$ für $x \notin \Sigma'$, und $m(v_0) = 1$, falls $\Sigma' \neq \Sigma$. Aus (5.2) erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(Q_m, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma'} \text{Hom}(U_v^0/U_v^{m(v)}, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \text{Hom}(K_1(\mathcal{O}_k), \mathbb{Z}/\ell),$$

die nach dem vorher Gesagten die Isomorphie

$$\text{Hom}(Q_m, \mathbb{Z}/\ell) \simeq \bigoplus_{v \in \Sigma} \text{Hom}(U_v^0/U_v^{m(v)}, \mathbb{Z}/\ell)$$

liefert. Da andererseits wegen $m(\infty) = 0$ die kurze exakte Sequenz der Kokerne in (5.2) spaltet, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \text{Hom}(C_m(k), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma} \text{Hom}(U_v^0/U_v^{m(v)}, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow 0.$$

Durch Übergang zum direkten Limes über alle m mit Träger Σ' wie oben folgt wegen $H^1(k_{\Sigma'}/k, \mathbb{Z}/\ell) \simeq \varinjlim_m \text{Hom}(C_m(k), \mathbb{Z}/\ell)$ jetzt die Behauptung. \square

Im Gegensatz zu Proposition 5.1.1 kann man für zerfallende Scholzprobleme nicht erwarten, keinen zusätzlichen Verzweigungspunkt zu benötigen. Daß jedoch ein einziger zusätzlicher Verzweigungspunkt, dessen Grad man sogar noch vorschreiben kann, ausreicht, und daß für diesen Verzweigungspunkt dann schon eine Scholzlösung existiert, zeigt

Proposition 5.1.3. *Ist $\ell \neq p = \text{ch}(\mathbb{F})$, so gibt es für jedes zerfallende ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta)$ unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in (X \setminus \Delta)_0$, so daß $[\kappa(x) : \mathbb{F}] = dm$, mit $d = [\mathbb{F}(\zeta_{\ell^n}) : \mathbb{F}]$ teilerfremd zu m , gilt, insbesondere also $\kappa(x)$ keine primitive ℓ^{n+1} -te Einheitswurzel enthält, und das induzierte Problem $\mathcal{S}(\mathbb{F}, \Delta \cup \{x\})$ eine Scholzlösung besitzt.*

Für $\zeta_{\ell} \notin k$ ist das ein Spezialfall von

Satz 5.1.4. *Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit $q = p^m$ Elementen und ℓ eine Primzahl mit $\ell \nmid (q-1)q$; d.h. insbesondere besitzt k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel. Sei $d = [\mathbb{F}_q(\zeta_{\ell^n}) : \mathbb{F}_q]$. Für jedes ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\mathbb{F}_q, \Delta)$ existieren unendlich viele abgeschlossene Punkte $x \in (X \setminus \Delta)_0$, so daß $\deg(x) = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q] = dm$ mit d teilerfremd zu m gilt, und $\mathcal{S}(\mathbb{F}_q, \Delta \cup \{x\})$ eine Scholzlösung besitzt. Insbesondere existiert ein abgeschlossener Punkt vom Grad dm , falls $dm \log q \geq N(\ell, n) := 4 \log(8\ell^n(2+n))$ gilt.*

Beweis. [GJ98, Thm. 9.1]. □

5.2 Scholzprobleme über lokalen Körpern

Wir wollen die Ergebnisse aus §5.1 auf ℓ^n -Scholzprobleme über lokalen Grundkörpern übertragen. Weil wir durchweg $\ell \neq 2$ annehmen, sind die Probleme nur bei nicht-archimedischen Grundkörpern nicht trivial. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir auch den Fall archimedischer Grundkörper, womit wir beginnen.

5.2.1 Archimedische Körper

Sei also k ein archimedischer, lokaler Körper, d.h. $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$, und $X = \mathbb{P}_k^1$. Wir betrachten zuerst den Fall $k = \mathbb{C}$. Der ist besonders einfach, denn $\pi_1(X \setminus \Delta)$ ist für alle nichtleeren, abgeschlossenen Unterschemata Δ von X eine freie proendliche Gruppe. Daher ist insbesondere jedes Einbettungsproblem mit abelschem Kern lösbar.

Sei jetzt $k = \mathbb{R}$. Dann haben wir die Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}/\mathbb{R}, H^q(\pi_1(\overline{X \setminus \Delta}), C)) \Rightarrow H^{p+q}(\pi_1(X \setminus \Delta), C).$$

Daraus folgt für $2 \nmid \#C$

$$H^2(\pi_1(X \setminus \Delta), C) \simeq H^2(\pi_1(\overline{X \setminus \Delta}), C)^{G_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}} = 0$$

und also ist jedes Einbettungsproblem mit abelschem Kern ungerader Ordnung über \mathbb{R} lösbar. Zusammenfassend gilt

Lemma 5.2.1. *Sei U ein affines Unterschema von \mathbb{P}_k^1 und k ein zusammenhängender, lokalkompakter Körper. Dann ist jedes Einbettungsproblem für $\pi_1(U)$ mit abelschem Kern ungerader Ordnung lösbar.*

5.2.2 K-Theorie und höherdimensionale Klassenkörpertheorie

Wir wiederholen die Aussage der Klassenkörpertheorie für Kurven über lokalen Körpern nach K. Kato und S. Saito [KS83]. Die wesentlichen Bausteine dieser zweidimensionalen Klassenkörpertheorie sind die milnorschen K-Gruppen K_q^M , $q \geq 0$. Sie werden für einen beliebigen Körper F definiert durch

$$K_0^M(F) = \mathbb{Z}, \quad K_1^M(F) = F^\times \quad \text{und} \\ K_q^M(F) = \underbrace{(F^\times \otimes \cdots \otimes F^\times)}_{q\text{-mal}} / J \quad \text{für } q \geq 2,$$

wobei J diejenige Untergruppe des Tensorprodukts bezeichnet, die von Elementen $a_1 \otimes \cdots \otimes a_q$, $a_1, \dots, a_q \in F^\times$, mit $a_i + a_j = 1$ für Indizes $i \neq j$ erzeugt wird. Die Nebenklasse $a_1 \otimes \cdots \otimes a_q + J$ wird mit $\{a_1, \dots, a_q\}$ bezeichnet. Dadurch erhalten wir auch eine Abbildung

$$\{ , \} : K_p^M(F) \otimes K_q^M(F) \rightarrow K_{p+q}^M(F) \\ \{a_1, \dots, a_p\} \otimes \{b_1, \dots, b_q\} \mapsto \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\}.$$

Auf diese Weise bekommt $K_*^M(F) = \bigoplus_{q \geq 0} K_q^M(F)$ eine Ringstruktur und heißt der Milnorring von F .

Für einen Ring R bezeichne $K_q(R)$ die q -te quillensche K -Gruppe von R [Qui73]. Es ist bekannt, daß es für alle q kanonische Homomorphismen $K_q^M(F) \rightarrow K_q(F)$ gibt, die für $q \leq 2$ sogar Isomorphismen sind. Wir werden daher im folgenden $K_q^M(F)$ und $K_q(F)$ für $q \leq 2$ immer stillschweigend miteinander identifizieren.

Sei nun F ein diskret bewerteter Körper mit Restklassenkörper \bar{F} , Ganzheitsring \mathcal{O}_F und maximalem Ideal \mathfrak{m} . Die Gruppe der i -ten Einseinheiten wird gegeben durch $U^{(i)} := \text{Kern}(\mathcal{O}_F^\times \rightarrow (\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}^i)^\times)$ für $i \geq 0$. Es gilt $U = U^{(0)} = \mathcal{O}_F^\times$. In [Kat79] definiert Kato für $q \geq 1$ eine Filtration $(U^i K_q^M(F))_{i \geq 0}$ auf $K_q^M(F)$ wie folgt. Setze

$$U^i K_q^M(F) = \text{im} \left(U^{(i)} \otimes K_{q-1}^M(F) \xrightarrow{\{ , \}} K_q^M(F) \right)$$

für $i \geq 1$ und

$$U^0 K_q^M(F) = \text{im} \left(\underbrace{U \otimes \cdots \otimes U}_{q\text{-mal}} \xrightarrow{\{ , \}} K_q^M(F) \right).$$

Aus der Definition folgt sofort, daß wir eine absteigende Filtration erhalten.

Proposition 5.2.2. *Mit den Bezeichnungen wie bisher gilt:*

- (i) $K_q^M(F)/U^1K_q^M(F) \simeq K_q^M(F)/U^0K_q^M(F) \oplus U^0K_q^M(F)/U^1K_q^M(F)$,
- (ii) $K_q^M(F)/U^0K_q^M(F) \simeq K_{q-1}^M(\overline{F})$,
- (iii) $U^0K_q^M(F)/U^1K_q^M(F) \simeq K_q^M(\overline{F})$.

Beweis. Das ist ein klassisches Ergebnis und folgt aus [BT73, Ch. I, Prop. 4.3].

Um etwas präziser zu sein, bezeichne v die diskrete Bewertung von F und sei $q = 2$ (das ist der später für die Anwendung wichtige Fall). Dann existiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \partial_v : K_2(F) &\rightarrow \overline{F}^\times \\ \{a, b\} &\mapsto (-1)^{v(a)v(b)} \left(\frac{a^{v(b)}}{b^{v(a)}} \right) \end{aligned}$$

das sog. „zahme Symbol“. Man rechnet sofort nach, daß $U^0K_2(F) \subseteq \text{Kern } \partial_v$ gilt und ∂_v surjektiv ist. Ferner liefert für $\overline{a} \in \overline{F}^\times$ die Zuordnung $\overline{a} \mapsto \{a, \pi\}$, wo a ein Vertreter in einem multiplikativen Repräsentatensystem und π eine Uniformisierende von F bzgl. v ist, einen Schnitt. Daraus folgt (i) und (ii). Um (iii) einzusehen, führt man dieselbe Art Untersuchung für die Reduktionsabbildung

$$\begin{aligned} K_q^M(F) &\rightarrow K_q^M(\overline{F}) \\ \{a_1, \dots, a_q\} &\mapsto \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_q\}, \end{aligned}$$

wo $\overline{a}_i := a_i + \mathfrak{m}$, durch. □

Um später darauf Bezug nehmen zu können, beweisen wir jetzt noch

Proposition 5.2.3. *Sei k ein nicht-archimedischer, lokaler Körper und m eine natürliche Zahl, prim zur Charakteristik. Dann ist*

$$K_2(k)/m \simeq \mu_m(k),$$

wobei $\mu_m(k)$ die Menge der m -ten Einheitswurzeln in k bezeichnet.

Beweis. Nach [MS83] und lokaler Tate-Dualität [NSW00, 7.2.6] haben wir einen Isomorphismus

$$K_2(k)/m \simeq H^2(k, \mathbb{Z}/m(2)) \simeq ((\mathbb{Z}/m(-1))^{G_k})^* \simeq \mu_m(k). \quad \square$$

Bemerkung 5.2.4. Eine genauere Kenntnis von $K_2(k)$ hat man durch den Satz von C. Moore [Moo68], demzufolge

$$K_2(k) \simeq mK_2(k) \oplus \mu_m(k)$$

gilt, wobei m die maximale Ordnung einer in k enthaltenen Einheitswurzel und $mK_2(k)$ eindeutig dividierbar ist.

Wir beginnen nun die Klassenkörpertheorie für Funktionenkörper von Kurven über lokalen Körpern zu beschreiben. Sei dazu aber zunächst K ein vollständiger, diskret bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper ein lokaler Körper ist (z.B. $K = \mathbb{Q}_p((t))$). Solche Körper heißen auch zweidimensionale lokale Körper, oder einfach 2-lokale Körper. Entsprechend definiert man induktiv n -lokale Körper. Für diese Körper hat Kato in [Kat79] eine Klassenkörpertheorie bewiesen.

Satz 5.2.5 (Kato). *Sei K ein n -lokaler Körper.*

- i) Es gibt einen Gruppenisomorphismus $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{cf}(K_n^M(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, wobei Hom_{cf} die Menge der stetigen Homomorphismen von endlicher Ordnung bezeichnet. Für die Definition der Topologie auf $K_n^M(K)$ siehe loc. cit..*
- ii) Sei $\xi \in H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Die zu ξ gehörige Erweiterung von F ist genau dann unverzweigt, wenn der von ξ induzierte Homomorphismus $K_n^M(K) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ die Gruppe $U^0 K_n^M(K)$ annulliert.*

Es sei darauf hingewiesen, daß dieser Satz eine natürliche Verallgemeinerung der klassischen Klassenkörpertheorie für lokale Körper darstellt. Sei nun K der Funktionenkörper einer glatten, eigentlichen und geometrisch zusammenhängenden Kurve X über einem nicht-archimedischen, lokalen Körper k , sowie A der Ganzheitsring von K . Da $A \supset k$ ein Dedekindring ist, definieren wir — Vorbild nehmend an der Klassenkörpertheorie für globale Körper — eine Idelklassengruppe für K . Für einen abgeschlossenen Punkt $z \in X_0$ bezeichne K_z die z -adische Komplettierung von K . Diese ist ein 2-lokaler Körper. Ein Modul m auf X ist eine Familie $(m(z))_z$ von nicht-negativen, ganzen Zahlen $m(z)$ für jeden abgeschlossenen Punkt z von X , die fast alle Null sind. Damit definieren wir

$$I_m(K) = \bigoplus_{z \in X_0} K_2(K_z) / U^{m(z)} K_2(K_z)$$

und setzen $C_m(K)$ gleich dem Kokern von $K_2(K) \rightarrow I_m(K)$ unter der Diagonaleinbettung. $C_m(K)$ wird mit der feinsten Topologie versehen, so daß die kanonischen Abbildungen $K_2(K_z) / U^{m(z)} K_2(K_z) \rightarrow C_m(K)$ für alle $z \in X_0$ stetig sind. Schließlich setzen wir $C(K) = \varprojlim_m C_m(K)$ und versehen es mit der Topologie des projektiven Limes. Dann gilt

Satz 5.2.6. *Es gibt einen Epimorphismus $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{cf}(C(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Dieser ist sogar ein Isomorphismus, falls X gute Reduktion besitzt.*

Beweis. [KS83, Ch. I, Thm. 6] □

Als Anwendung beweisen wir jetzt Lemma 5.1.2 für rationale Funktionenkörper über lokalen Körpern k . Dazu wählen wir einen k -rationalen Punkt von $X = \mathbb{P}_k^1$, den wir mit ∞ bezeichnen und als den unendlich fernen Punkt ansprechen. Diese Wahl bestimmt dann ein affines Unterschema $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[t]$. Bezeichnet schließlich K den Funktionenkörper von X , so gilt

Satz 5.2.7. Sei ℓ eine ungerade Primzahl und k ein nicht-archimedischer, lokaler Körper mit von ℓ verschiedener Charakteristik. Bezeichne $\Delta \subset \mathbb{P}_k^1$ eine endliche Menge abgeschlossener Punkte mit $\infty \notin \Delta$ und $z_0 \in (\mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta)(k)$ einen k -rationalen Punkt. Enthält k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel, so setzen wir $\Delta' = \Delta \cup \{z_0\}$, ansonsten sei $\Delta' = \Delta$. Dann ist für $U = \mathbb{P}_k^1 \setminus \Delta'$

$$H^1(U, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \bigoplus_{z \in \Delta} \text{Hom}_{cf}(K_2(\kappa(z)), \mathbb{Z}/\ell)$$

surjektiv. Insbesondere hat man einen Epimorphismus

$$H^1(K, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \bigoplus_{z \in (\mathbb{P}_k^1)_0} \text{Hom}_{cf}(K_2(\kappa(z)), \mathbb{Z}/\ell).$$

Beweis. Für den Modul $m = (m(z))$ auf X mit $m(z) = 1$, falls $z \in \Delta'$, und $m(z) = 0$ sonst, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & 0 & \\
& & & & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & K_2(k[t]) & \longrightarrow & K_2(K) & \longrightarrow & \bigoplus_{z \in (\mathbb{A}_k^1)_0} \kappa(z)^\times \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{z \in (\mathbb{P}_k^1)_0} U^0/U^{m(z)} & \longrightarrow & \bigoplus_{z \in (\mathbb{P}_k^1)_0} K_2(K_z)/U^{m(z)} & \longrightarrow & \bigoplus_{z \in (\mathbb{P}_k^1)_0} \kappa(z)^\times \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Q_m & \longrightarrow & C_m(K) & \longrightarrow & \kappa(\infty)^\times \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array} \tag{5.3}$$

Die Exaktheit der ersten Zeile ergibt sich aus der Lokalisierungssequenz für Dedekindringe [Qui73, §5]. Die der mittleren Zeile folgt aus Proposition 5.2.2. Da k von ℓ verschiedene Charakteristik besitzt, sind alle Gruppen $U^1 K_2(K_z)$ ℓ -dividierbar, und es gilt insbesondere

$$H^1(U, \mathbb{Z}/\ell) \simeq \text{Hom}_{cf}(C_m(k(t)), \mathbb{Z}/\ell); \tag{5.4}$$

vgl. [KS83].

Nach Proposition 5.2.2 gilt für alle $z \in \mathbb{P}_k^1$ die Isomorphie $U^0/U^{m(z)} \simeq K_2(\kappa(z))$. Daher erhalten wir aus (5.3) die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{cf}(Q_m, \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \bigoplus_{z \in \Delta'} \text{Hom}_{cf}(K_2(\kappa(z)), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \text{Hom}_{cf}(K_2(k[t]), \mathbb{Z}/\ell). \tag{5.5}$$

Wegen $K_2(k[t]) \simeq K_2(k)$ [Qui73, §6] zeigt Proposition 5.2.3

$$K_2(k[t])/\ell \simeq K_2(k)/\ell \simeq \mu_\ell(k).$$

Enthält k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel, so gilt für den k -rationalen Punkt z_0 die Isomorphie $U^0/U^{m(z_0)} \otimes \mathbb{Z}/\ell \simeq K_2(k[t])/\ell$. Folglich liefert (5.5) einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{cf}(Q_m, \mathbb{Z}/\ell) \simeq \bigoplus_{z \in \Delta} \mathrm{Hom}_{cf}(K_2(\kappa(z)), \mathbb{Z}/\ell).$$

Wegen $m(\infty) = 0$ spaltet die kurze exakte Sequenz der Kokerne in (5.3) und folglich ist die kanonische Abbildung $\mathrm{Hom}_{cf}(C_m(k(t)), \mathbb{Z}/\ell) \rightarrow \mathrm{Hom}_{cf}(Q_m, \mathbb{Z}/\ell)$ ein Epimorphismus. Daraus folgt die Behauptung. \square

5.2.3 Nicht-archimedische Körper

Sei nun k ein nicht-archimedischer, lokaler Körper, d.h. eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p oder $\mathbb{F}_p((t))$. Bezeichne \mathcal{O}_k den Ganzheitsring von k und sei $S := \mathrm{Spec} \mathcal{O}_k$. Wir setzen $X = \mathbb{P}_k^1$ und $\mathcal{X} = \mathbb{P}_S^1$. Die spezielle Faser von \mathcal{X} sei mit Y bezeichnet. Ferner bezeichne I_k die absolute Trägheitsgruppe in G_k .

Sei $\mathcal{S}(k, \Delta)$ ein ℓ^n -Scholzproblem. Für jeden Divisor $\Delta' \supseteq \Delta$ auf X bezeichne $\mathcal{S}(k, \Delta')$ das durch $\pi_1(X \setminus \Delta') \rightarrow \pi_1(X \setminus \Delta)$ induzierte Scholzproblem.

Proposition 5.2.8. *Sei ℓ eine auf S invertierbare Primzahl. Enthält k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel, so ist jedes ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta) = (\pi_1(X \setminus \Delta), \rho, \alpha)$ lösbar.*

Besitzt k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel und ist $s : \mathrm{Spec} k \rightarrow X \setminus \Delta$ ein Schnitt, $x_0 := s(\mathrm{Spec} k)$, so ist immerhin noch das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ lösbar.

Beweis. Nach Proposition 4.2.1 können wir $\mathcal{S}(X \setminus \Delta)$ o.E. als nichtzerfallend annehmen. Bezeichne K den Funktionenkörper von X . Wir zeigen zunächst, daß das durch $\mathrm{Spec} K \hookrightarrow X \setminus \Delta$ induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(K)$ eine Lösung besitzt. Da X nach Voraussetzung geometrisch zusammenhängend ist, ist die kanonische Restriktionsabbildung

$$H^2(K, \mathrm{Kern} \mathcal{S}) \rightarrow \prod_{x \in X_0} H^2(K_x, \mathrm{Kern} \mathcal{S}),$$

wobei K_x den Quotientenkörper von $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ bezeichnet, injektiv ([Pop88, Thm. 3.7 + Thm. 4.1] und [Sai86, Thm. 9.2], falls $\mathrm{ch}(k) \neq 0$). Demnach reicht es zu zeigen, daß für alle $x \in X_0$ das durch $\mathrm{Spec} K_x \rightarrow \mathrm{Spec} K$ induzierte lokale Einbettungsproblem $\mathcal{S}(K_x)$ lösbar ist.

Sei nun also $x \in X_0$ beliebig, bezeichne $D = \overline{\{x\}} \subset \mathcal{X}$ die Ausdehnung von x und $y \in \mathcal{X}$ die Spezialisierung von x . Dann liest sich $\mathcal{S}(K_x)$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G_{K_x} & & \\ & & & & \rho_x \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E_x & \longrightarrow & G_x \longrightarrow 1. \end{array}$$

Sei wieder o.E. $\mathcal{S}(K_x)$ nichtzerfallend. Wir sagen ρ bzw. ρ_x ist in x verzweigt bzw. unverzweigt, falls das für die zu ρ gehörige Galoisüberlagerung f von \mathcal{X} (s. Konvention §3.3) der Fall ist. Es gibt drei Fälle zu unterscheiden.

1) Wir nehmen zunächst an, ρ sei in x verzweigt. Sei $L_x := \overline{K_x}^{\text{Kern } \rho_x}$. Nach den Scholzbedingungen ist dann L_x/K_x total zahm verzweigt, also $L_x = K_x(\sqrt[m]{t})$ für eine Uniformisierende t von K_x und $m < n$. Folglich ist $K_x(\sqrt[m+1]{t})$ eine gesuchte Galoiserweiterung.

2) Sei nun ρ als unverzweigt entlang D angenommen. Dann ist ρ in y unverzweigt und nach dem Reinheitssatz von Zariski-Nagata insbesondere auch entlang Y . Überdies schneidet D nicht den Verzweigungsdivisor von f . Somit zeigt Korollar 3.2.13, daß ρ_x über $G_{K_x} \rightarrow \pi_1(y)$ faktorisiert. Wegen $\pi_1(y) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$, zeigt das die Existenz einer Lösung.

3) Es bleibt nun noch der letzte Fall zu betrachten, nämlich daß ρ unverzweigt in x , aber verzweigt in y ist. Dieser Fall tritt ein, falls entweder f in der speziellen Faser Y von \mathcal{X} verzweigt ist, oder D den Verzweigungsdivisor von f in y schneidet. Da es für das Verhalten von f entlang D keine Rolle spielt, welche der beiden Ursachen zutrifft, nehmen wir o.E. f als in Y verzweigt an. Nach Voraussetzung genügt f den Scholzbedingungen, ist also rein verzweigt in Y . Somit zeigt Proposition 3.2.14, daß in der nach Voraussetzung existierenden Zerlegung

$$\begin{array}{ccc}
 G_{K_x} & & \\
 \downarrow \rho_x & \searrow & \\
 & & G_{\kappa(x)} \\
 & \swarrow \tilde{\rho}_x & \\
 G_x & &
 \end{array}$$

$\tilde{\rho}_x$ wieder die Scholzbedingungen erfüllt, d.h. entweder unverzweigt oder total verzweigt ist. Folglich besitzt $\tilde{\rho}_x$ und daher auch ρ_x eine Liftung. Das folgt entweder indem man die Argumente aus i) und ii) für $\tilde{\rho}_x$ wiederholt oder aus dem Beweis von Proposition 5.1.1.

Zusammenfassend erhalten wir eine Lösung ψ von $\mathcal{S}(K)$. Sei $\tilde{\Delta} = \Delta \cup \{x_0\}$, falls k eine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält, und ansonsten $\tilde{\Delta} = \Delta$. Es bleibt noch zu zeigen, daß auch eine Lösung $\tilde{\psi}$ von $\mathcal{S}(K)$, die nur entlang $\tilde{\Delta}$ verzweigt ist, existiert. Dafür gehen wir wie in Proposition 5.1.1 vor. Wie dort bereits gezeigt wurde, reicht es eine Abbildung $\vartheta : \pi_1(X \setminus (\text{Ram}(\psi) \cup \tilde{\Delta})) \rightarrow C$ mit $\vartheta|_{I_x} = \psi|_{I_x}$ für $x \in \text{Ram}(\psi) \setminus \tilde{\Delta}$ zu konstruieren, wobei I_x die absolute Trägheitsgruppe im Punkt x bezeichnet. Die Existenz von ϑ folgt aus Satz 5.2.7, und also ist $\tilde{\psi} = \vartheta^{-1}\psi$ eine gesuchte Lösung.

Damit ist die Proposition bewiesen. \square

Wir wollen nun der Frage nachgehen, wann $\mathcal{S}(k, \Delta)$ eine Scholzlösung besitzt. Wie der Leser bereits vermuten mag, ist die Frage hier komplizierter als im Fall eines endlichen Körpers. So stellt man fest, daß sich der Beweis von Satz 5.1.4 nicht

übertragen läßt. Der Hauptgrund dafür liegt in dem Nichtvorhandensein eines tschebotareffschen Dichtigkeitssatzes für $X = \mathbb{P}_k^1$. Wenn man Scholzlösungen schon nicht direkt über X konstruieren kann, so ist es aber vielleicht möglich, Scholzlösungen über Y zu Scholzlösungen über X zu liften? Das ist was wir jetzt zeigen wollen.

Entscheidendes Hilfsmittel dafür ist die grothendiecksche Theorie der Spezialisierungsabbildung. Wir nennen im folgenden einen Divisor \mathcal{D} auf \mathcal{X} *etal*, falls die Komposition $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{X} \rightarrow S$ etal ist. Wir sagen ein Divisor Δ auf X ist etal über S , falls sein Abschluß in \mathcal{X} etal ist.

Satz 5.2.9. *Bezeichne Y die spezielle Faser von $\mathcal{X} = \mathbb{P}_S^1$ und sei \mathcal{D} ein etaler Divisor auf \mathcal{X} . Wir setzen $D = \mathcal{D} \times_{\mathcal{X}} Y$ bzw. $\Delta = \mathcal{D} \times_{\mathcal{X}} X$. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1^{(p')}(\overline{Y \setminus D}) & \longrightarrow & \pi_1'(Y \setminus D) & \longrightarrow & G_\kappa \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1^{(p')}(\overline{X \setminus \Delta}) & \longrightarrow & \pi_1'(\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}) & \longrightarrow & \pi_1(S) \longrightarrow 1, \end{array}$$

besitzt exakte Zeilen und alle vertikalen Pfeile sind Isomorphismen. Hierbei bezeichnet $\pi_1'(Z)$ den Quotienten von $\pi_1(Z)$ nach dem Kern von $\pi_1(\overline{Z}) \rightarrow \pi_1^{(p')}(\overline{Z})$.

Beweis. Da D nach Voraussetzung etal und insbesondere horizontal ist, existiert nach Hensels Lemma ein Schnitt $s : S \rightarrow \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$, $\mathcal{X} = \mathbb{P}_S^1$. Daher dürfen wir [SGA 1, XIII Prop. 4.3] anwenden, woraus die Exaktheit der Zeilen folgt. Die Kommutativität des Diagramms folgt aus der des rechten Quadrats, welche ihrerseits aus Funktorialitätsgründen gegeben ist. \square

Damit beweisen wir jetzt

Satz 5.2.10. *Sei ℓ eine auf S invertierbare Primzahl und Δ ein über S etaler Divisor auf $X = \mathbb{P}_k^1$. Ferner enthalte k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel. Dann existiert für jedes ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta) = (\pi_1(X \setminus \Delta), \rho, \alpha)$, so daß ρ entlang der speziellen Faser unverzweigt ist, unendlich viele über S etale Divisoren $\Delta' \supset \Delta$, so daß das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta')$ eine Scholzlösung besitzt. Genauer sind alle Divisoren Δ' von der Gestalt $\Delta \cup \{x'\}$ für einen abgeschlossenen Punkt x' von X .*

Beweis. Bezeichne Y die spezielle Faser von \mathcal{X} , \mathcal{D} die Ausdehnung von Δ auf \mathcal{X} und

sei $D = \mathcal{D} \times_{\mathcal{X}} Y$. Nach Satz 5.2.9 ist das folgende Diagramm exakt und kommutativ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \pi_1^{(p')}(X \setminus \Delta) & \xlongequal{\quad} & \pi_1^{(p')}(X \setminus \Delta) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1^{(p')}(Y \setminus D) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & I_k & \longrightarrow & \pi_1'(X \setminus \Delta) & \longrightarrow & \pi_1'(\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1'(Y \setminus D) \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & I_k & \longrightarrow & G_k & \longrightarrow & \pi_1(S) & \xleftarrow{\cong} & G_{\kappa} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array} \tag{5.6}$$

Da ℓ auf S invertierbar ist, faktorisiert ρ über $\pi_1'(Y \setminus D)$ und induziert somit ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(Y \setminus D)$ (Proposition 3.3.4). Satz 5.1.4 zufolge existieren unendlich viele abgeschlossene Punkte $y \in (Y \setminus D)_0$, so daß $\mathcal{S}(Y \setminus (D \cup \{y\}))$ eine Scholzlösung $\bar{\psi}$ besitzt.

Wir konstruieren jetzt wie folgt einen etalen Divisor auf \mathcal{X} , der y enthält. Bezeichne dazu k' die eindeutige, unverzweigte Erweiterung von k mit Restklassenkörper $\kappa(y)$, sowie $\mathcal{O}_{k'}$ die Normalisierung von \mathcal{O}_k in k' . $S' := \text{Spec } \mathcal{O}_{k'}$. Wegen der Glattheit von $\mathcal{X} \times_S S' \rightarrow S'$ ist die Reduktionsabbildung $\mathcal{X}(S') \simeq (\mathcal{X} \times_S S')(S') \rightarrow Y_{\kappa(y)}(\kappa(y)) \simeq Y(\kappa(y))$ surjektiv [EGA IV, 18.5.17]. Folglich gibt es einen S' -wertigen Punkt von \mathcal{X} , dessen Bild \mathcal{D}_y den Punkt y enthält. Nach Konstruktion ist $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_y$ etal und das obenstehende Diagramm (5.6) besitzt auch Gültigkeit für \mathcal{D}' bzw. $\Delta' = \mathcal{D}' \times_{\mathcal{X}} X$ anstelle von \mathcal{D} bzw. Δ . Somit läßt sich die Scholzlösung von $\mathcal{S}(Y \setminus (D \cup \{y\}))$ zu einer Lösung ψ von $\mathcal{S}(X \setminus \Delta')$ zurückziehen. Eine nochmalige Anwendung von Proposition 3.3.4 zeigt, daß ψ sogar eine Scholzlösung ist. \square

6 Nilpotente Gruppen als Galoisgruppen

Wir benutzen jetzt die in den vorherigen Paragraphen entwickelte Theorie, um einen Beweis des Hauptsatzes und Satz III der Einleitung zu geben.

6.1 Der Hauptsatz

Wir gehen aus von der

Behauptung 1. *Bezeichne G eine endliche, nilpotente Gruppe ungerader Ordnung und X entweder eine eigentliche, glatte, geometrisch zusammenhängende Kurve über einem Zahlkörper oder eine eigentliche, glatte, geometrisch zusammenhängende Fläche über einem endlichen Körper \mathbb{F} mit $(\#G, (\#\mathbb{F} - 1)) = 1$. Dann existiert eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $Y \rightarrow X$ mit Automorphismengruppe G .*

Als Spezialfall hiervon erhalten wir

Behauptung 2. *Bezeichne $\ell \neq 2$ eine Primzahl und k entweder einen Zahlkörper oder einen Funktionenkörper über einem endlichen Körper \mathbb{F} mit $\ell \nmid (\#\mathbb{F} - 1)$. Ferner sei G eine endliche ℓ -Gruppe. Dann gibt es eine geometrisch zusammenhängende, galoissche Überlagerung $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ mit Automorphismengruppe G .*

Wie wir bereits in der Einleitung gesagt haben, ist es uns nicht möglich, Behauptung 1 in der angegebenen Form zu beweisen, sondern nur unter Hinzunahme einer technischen Bedingung. Dazu zeigen wir zuerst, daß die beiden vorstehenden Behauptungen äquivalent sind. Dann geben wir einen von der Charakteristik unabhängigen Beweis von (Satz III der Einleitung)

Satz 6.1.1. *Sei entweder $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim, $\ell \neq 2$ eine fest gewählte Primzahl mit $\ell \nmid (p - 1)$ und G eine endliche abelsche Gruppe von Ordnung ℓ^n . Dann gibt es eine geometrisch zusammenhängende, galoissche Überlagerung $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ mit Automorphismengruppe G , die, falls $\ell \neq p$, nur in n Punkten mit jeweils galoissem Restklassenkörper verzweigt.*

Inbesondere ist Behauptung 1 für abelsche Gruppen richtig.

Schließlich geben wir einen Beweis für

Hauptsatz 6.1.2. *Für $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim bezeichne S ein reguläres Modell von k , und gelte: für jede endliche Menge abgeschlossener Punkte von \mathbb{P}_S^1 , die in der Faser über einem geeigneten Punkt $v \in S$ liegen und eine geeignete endliche ℓ -reguläre (Def. 1.3.1) Teilmenge $T \subset S$, gibt es einen über $S \setminus T$ fast etalen (d.h. alle irred. Komponenten sind über $S \setminus T$ etal), v -exzellenten Divisor auf \mathbb{P}_S^1 mit $I(D) \subset T$, der diese Punkte enthält.*

Dann ist Behauptung 1 richtig.

Eine genaue Erklärung der im Satz 6.1.2 auftretenden technischen Bedingung geben wir in §6.3.1.

Der Beweis der beiden Sätze ergibt sich durch eine Folge von Reduktionen. Als einen ersten Reduktionsschritt zeigen wir die bereits angekündigte Äquivalenz der beiden Behauptungen.

Proposition 6.1.3. *Behauptung 1 ist bereits eine Konsequenz aus Behauptung 2.*

Überdies reicht es, Behauptung 2 für $k_0 = \mathbb{Q}$ oder $k_0 = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim zu beweisen.

Beweis. Da jede nilpotente Gruppe G direktes Produkt ihrer ℓ -Sylogruppen ist, können wir o.E. G als ℓ -Gruppe voraussetzen. Wir nehmen zunächst einmal an, X ist eine eigentliche, glatte, geometrisch zusammenhängende Kurve über einem globalen Körper k wie in Behauptung 2. Dann gibt es einen endlichen Morphismus $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$. Da mit G auch das i -fache direkte Produkt G^i eine ℓ -Gruppe ist, existiert nach Behauptung 2 für alle $i \geq 1$ eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $Y_i \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ mit Gruppe G^i . Indem wir i hinreichend groß machen, finden wir eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ mit Gruppe G , deren Verzweigungsort disjunkt zu dem von f ist. Da aber \mathbb{P}_k^1 geometrisch einfach zusammenhängend ist, sind die zu X bzw. Y gehörigen Funktionenkörper über $k(t)$ linear disjunkt, und folglich ist $Y \times_{\mathbb{P}_k^1} X \rightarrow X$ eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung mit Gruppe G .

Damit folgt der Hauptsatz, falls X eine Kurve über einem Zahlkörper ist. Bleibt noch der Fall, daß es einen endlichen Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2$ gibt. Es existiert ein birationaler Isomorphismus $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$, und die generische Faser unter der Projektion $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$ auf den zweiten Faktor ist isomorph zu \mathbb{P}_k^1 , wo k den Funktionenkörper von $\mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$ bezeichnet. Bezeichne \tilde{X} die Normalisierung von \mathbb{P}_k^1 im Funktionenkörper von X . Aus dem ersten Absatz folgt, daß es eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ mit Gruppe G gibt. Dann ist die Normalisierung Y von X im Funktionenkörper von \tilde{Y} die gesuchte Überlagerungsfläche.

Die letzte Aussage schließlich folgt aus der Definition einer geometrischen Überlagerung. \square

Bemerkung 6.1.4. Im Zahlkörperfall besitzt Proposition 6.1.3 noch einen eleganteren Beweis. Es existiert nämlich eine Überlagerung $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$, die nur in drei \mathbb{Q} -rationalen Punkten verzweigt ist [Bel80]. Nach Behauptung 2 gibt es eine geometrisch zusammenhängende Galoisüberlagerung $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ mit Gruppe G . Nach evtl. Abänderung von $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ um einen Automorphismus von $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ können wir annehmen, daß die Verzweigungsorte von $Y \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ und $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ disjunkt sind (beachte: $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ operiert strikt 3-fach transitiv!). Da $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ einfach zusammenhängend ist, ist $Y \times_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1} X$ die gesuchte Überlagerung.

6.2 Gute Divisoren

Sei nun $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim. Bezeichne $\mathbb{P}(k)$ die Menge der Primstellen von k , und sei $\ell \neq 2$ eine fest gewählte Primzahl mit $\ell \nmid p(p-1)$. D.h. wir können annehmen, k enthalte keine primitive ℓ -te Einheitswurzel und $\text{ch}(k) \neq \ell$. Ferner fixieren wir ein reguläres Modell $S := S_k$ von k und setzen wieder $X = \mathbb{P}_k^1$ und $\mathcal{X} = \mathbb{P}_S^1$. Wir identifizieren wie bisher wieder S_0 mit einer Teilmenge von $\mathbb{P}(k)$. Für eine Stelle $v \in \mathbb{P}(k)$ bezeichne k_v die Lokalisierung von k an der Stelle v und sei $X_v = X \otimes_k k_v = \mathbb{P}_{k_v}^1$. Ferner sei $\mathcal{X}_v = \mathcal{X} \times_S S_v$ mit $S_v = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S,v}$. Schließlich seien alle Divisoren auf X als reduziert angenommen und können daher mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X identifiziert werden.

Wir sagen ein Divisor D auf X sei *v-fast gut*, $v \in S_0$, falls D die Bedingungen (i) und (ii) aus Proposition 2.1.9 erfüllt. Demnach ist für ℓ -reguläre (Definition 1.3.1) Punkte $v \in S$ ein Divisor D genau dann *v-fast gut*, wenn er ein schwacher ℓ -Blochpunkt für $X \setminus D$ ist. Für einen Divisor D auf X bezeichne D^c den Abschluß von D in \mathcal{X} . Ein Divisor D auf X heißt *v-gut*, $v \in S_0$, falls er *v-fast gut* und D^c etal über $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S,v}$ ist. Ist D ein *v-guter* Divisor, so ist v ein ℓ -Blochpunkt für $X \setminus D$ (Lemma 2.1.6).

6.2.1 Existenz guter Divisoren

Wir zeigen nun, daß jede endliche Familie abgeschlossener Punkte, die in einer geeigneten Faser von \mathcal{X} über v liegen, auf einem *v-guten* Divisor liegt.

Wir beginnen mit ein paar technischen Vorarbeiten.

Lemma 6.2.1. *Sei ℓ eine ungerade Primzahl, k ein globaler Körper, der keine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält, und $v \nmid \ell$ eine ℓ -reguläre Stelle von k , die in $k(\zeta_{\ell^n})/k$ träge bleibt, wo ζ_{ℓ^n} eine primitive ℓ^n -te Einheitswurzel ist. Für jede endliche Körpererweiterung $\kappa'/\kappa(v)$, die keine primitive ℓ^{n+1} -te Einheitswurzel besitzt, existiert eine endliche Körpererweiterung k'/k , so daß v in k' träge bleibt, und für die Stelle $v'|v$ von k' gilt:*

a) $\kappa(v') \simeq \kappa'$, und

b) $\mu_{\ell^\infty}(k') = \mu_{\ell^\infty}(k'_v)$.

Beweis. Sei $m = [\kappa' : \kappa(v)]$ und $i \geq 1$ die größte Zahl, so daß m von $\ell^{i-1}(\ell-1)$ geteilt wird. Setze $q := \#\kappa(v)$. Dann enthält κ' eine primitive ℓ^i -te, aber keine ℓ^{i+1} -te, Einheitswurzel, denn

$$q^m \equiv q^{\ell^{i-1}(\ell-1)m'} \equiv 1 \pmod{\ell^i}, \quad \text{aber } q^m \not\equiv 1 \pmod{\ell^{i+1}}, \quad (6.1)$$

da nach Voraussetzung $i \leq n$ und v in $k(\zeta_{\ell^n})$ träge ist. Bezeichne nun $\tilde{k} = k(\zeta_{\ell^i})$, wo ζ_{ℓ^i} eine primitive ℓ^i -te Einheitswurzel ist. Nach Voraussetzung ist v in \tilde{k} träge.

Bezeichne \tilde{v} die Stelle von \tilde{k} über v . Dann ist $\kappa(\tilde{v})$ ein Zwischenkörper von $\kappa'/\kappa(v)$ mit

$$\mu_{\ell^\infty}(\kappa') = \mu_{\ell^\infty}(\kappa(\tilde{v})) = \mu_{\ell^\infty}(\tilde{k}_{\tilde{v}}) = \mu_{\ell^\infty}(\tilde{k}),$$

wegen $\#\kappa(\tilde{v}) = q^{\ell^{i-1}(\ell-1)}$, (6.1) und $v \nmid \ell$. Bezeichne k'_v die eindeutige, unverzweigte Erweiterung von $\tilde{k}_{\tilde{v}}$ mit Restklassenkörper κ' . Dann ist $k'_v/\tilde{k}_{\tilde{v}}$ galoissch mit Gruppe \mathbb{Z}/\tilde{m} , wo $\tilde{m} = m/(\ell^{i-1}(\ell-1))$. Nach dem Satz von Grunwald-Wang [NSW00, 9.2.3] gibt es eine globale Galoiserweiterung k'/\tilde{k} mit Galoisgruppe \mathbb{Z}/\tilde{m} und $k' \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}_{\tilde{v}} \simeq k'_{v'}$. Nach Konstruktion ist \tilde{v} offensichtlich träge in k' und, da v nach Voraussetzung in \tilde{k} träge ist, auch v träge in k' . Sei v' die Stelle von k' über v . Dann ist $\kappa(v') \simeq \kappa'$ und $\#\kappa(v') = q^m$. Wegen der Maximalität von i gilt $q^m \not\equiv 1 \pmod{\ell^{i+1}}$ und daher $\mu_{\ell^\infty}(k') = \mu_{\ell^\infty}(\kappa') = \mu_{\ell^\infty}(k'_{v'})$. \square

Korollar 6.2.2. *Besitzt der Grad von $\kappa'/\kappa(v)$ eine Zerlegung $[\kappa' : \kappa(v)] = d \cdot m$ mit $d = [\kappa' \cap \kappa(v)(\zeta_{\ell^n}) : \kappa(v)]$ relativ prim zu m , so kann man die Körpererweiterung k'/k in Lemma 6.2.1 zusätzlich als galoissch wählen.*

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 6.2.1. Unter den angegebenen Voraussetzungen gibt es einen zu $\kappa(\tilde{v})$ linear disjunkten Zwischenkörper κ'' von $\kappa'/\kappa(v)$ vom Grad m mit $\kappa' \simeq \kappa(\tilde{v}) \otimes_{\kappa(v)} \kappa''$. Bezeichne $k''_{v''}$ die eindeutige unverzweigte Erweiterung von k mit Restklassenkörper κ'' . Nach dem Satz von Grunwald-Wang gibt es eine globale Galoiserweiterung k''/k mit Galoisgruppe \mathbb{Z}/m und $k'' \otimes_k k_v \simeq k''_{v''}$. Dann ist k'' über k linear disjunkt zu \tilde{k} . Bezeichne nun k'/k das Kompositum der beiden. Das ist nun eine Galoiserweiterung vom Grad dm mit Restklassenkörper κ' . Da d und m relativ prim sind, gilt $\mu_{\ell^\infty}(k') = \mu_{\ell^\infty}(\tilde{k}) = \mu_{\ell^\infty}(\tilde{k}_{\tilde{v}}) = \mu_{\ell^\infty}(k'_{v'})$. \square

Korollar 6.2.3. *Ist m in Korollar 6.2.2 eine Primzahlpotenz $m = \ell^{j'}$ mit $\ell' > \ell$ und $\ell' \not\equiv 1 \pmod{\ell}$, $[k(\zeta_{\ell^{j'+1}}) : k] = \ell^{j'}(\ell' - 1)$ und v auch im eindeutigen Zwischenkörper vom Grad $\ell^{j'}$ über k in $k(\zeta_{\ell^{j'+1}})$ träge, so kann man die Körpererweiterung k'/k in Lemma 6.2.1 zusätzlich als galoissch und außerhalb einer ℓ -regulären Stellenmenge als unverzweigt annehmen.*

Beweis. Die Voraussetzungen implizieren, daß ℓ und ℓ' ungerade Primzahlen sind und ℓ' teilerfremd zu $\ell - 1$ ist. In diesem Fall kann man k'' in Korollar 6.2.2 als den eindeutigen Zwischenkörper vom Grad $\ell^{j'}$ in $k(\zeta_{\ell^{j'+1}})/k$ wählen. Dann sind k'' und \tilde{k} linear disjunkt über k , und das Kompositum k'/k ist galoissch mit zyklischer Gruppe $\mathbb{Z}/\ell^{j'} \times \mathbb{Z}/\ell^{n-1} \times \mathbb{Z}/\ell - 1$. Nach Voraussetzung ist v auch in k'/k träge und es gelten die Bedingungen a) und b) aus Lemma 6.2.1. Offensichtlich ist k'/k im Zahlkörperfall nur bei ℓ und ℓ' verzweigt, sonst unverzweigt. Wegen $\ell' \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ entspricht ℓ' in diesem Fall eine ℓ -reguläre Stelle. \square

Wir kommen nun zur angekündigten Existenzaussage. Sei dazu wie zu Beginn von §6.2 $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim, und sei $\ell \neq 2$ eine Primzahl mit $\ell \nmid p(p-1)$. $S = S_k$.

Lemma 6.2.4. *Bezeichne $\pi : \mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$ den Strukturmorphismus und $v \in S$ eine ℓ -reguläre Stelle, die in $k(\zeta_{\ell^n})/k$ träge bleibt, sowie j eine positive, ganze Zahl $\leq n$. Sei ferner $\{y_1, \dots, y_d\} \subset \mathbb{P}_S^1$ eine Familie abgeschlossener Punkte mit $\pi(y_i) = v$ und $[\kappa(y_i) : \kappa(v)] = m\ell^{j-1}(\ell - 1)$ mit $(\ell(\ell - 1), m) = 1$ für $1 \leq i \leq d$. Dann gibt es einen v -guten Divisor $D = \{x_1, \dots, x_d\}$, so daß die y_i in D^c enthalten sind und die Spezialisierung von x_i über v gleich y_i ist.*

Ist v und $m = \ell^{j'}$ wie in Korollar 6.2.3, so können wir D zusätzlich als fast etal außerhalb einer ℓ -regulären Teilmenge von S wählen.

Beweis. Wir können o.E. $\{y_1, \dots, y_d\} \subset \mathbb{A}_S^1$ annehmen. Bezeichne $\pi : \mathbb{A}_S^1 \rightarrow S$ den Strukturmorphismus und $Y_v = \mathbb{A}_{\kappa(v)}^1$ die Faser über v . Abhängig von der Gestalt von m liefert Korollar 6.2.2 bzw. Korollar 6.2.3 eine Galoiserweiterung k'/k in der v träge bleibt und für die Fortsetzung v' von v gilt: $\kappa(v') = \kappa(y_i)$ für $1 \leq i \leq d$. Bezeichne S' die Normalisierung von S in k' . Wir haben ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}_S^1 & \xleftarrow{p} & \mathbb{A}_{S'}^1 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xleftarrow{q} & S' \end{array}$$

mit $q^{-1}(v) = \{v'\}$. Bezeichne $Y_{v'}$ die Faser über v' . Für $1 \leq i \leq d$ wählen wir abgeschlossene Punkte $y'_i \in Y_{v'}$ mit $p(y'_i) = y_i$. Wegen $\kappa(v') = \kappa(y_i)$ sind die y'_i notwendigerweise $\kappa(v')$ -rationale Punkte. Daher gibt es für jeden Punkt y'_i einen surjektiven Morphismus

$$\begin{array}{ccc} \kappa(v')[\bar{t}] & \twoheadrightarrow & \kappa(v') \\ \bar{t} & \mapsto & \bar{z}_i. \end{array}$$

Andererseits existieren auch Surjektionen $\mathcal{O}_{S'} \twoheadrightarrow \kappa(v')$ und $\mathcal{O}_{S'}[t] \twoheadrightarrow \kappa(v')[\bar{t}]$, so daß man nach Wahl eines Urbilds z_i von \bar{z}_i ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_S[t] & \twoheadrightarrow & \kappa(s)[\bar{t}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_S & \twoheadrightarrow & \kappa(s) \end{array}$$

bekommt und die durch $t \mapsto z_i$ induzierten Schnitte einen Divisor $D' = \{x'_1, \dots, x'_d\}$ auf $X' = X \times_k k'$ definieren, so daß D'^c alle y'_i enthält und die Spezialisierung von x'_i über v' gleich y'_i ist. Dann definiert $D = \{p(x'_1), \dots, p(x'_d)\}$ einen Divisor auf X , so daß D^c alle y_i enthält und die Spezialisierung von $x_i = p(x'_i)$ über v gleich y_i ist. Überdies ist D noch v -gut. Nach Konstruktion von D und k' reicht es zu zeigen, daß $\kappa(x_i) = k'$ gilt für $1 \leq i \leq d$. Aus der Konstruktion sieht man, $\kappa(x_i)$ ist ein Zwischenkörper von k'/k . Andererseits ist $[\kappa(y_i) : \kappa(v)]$ der kleinstmögliche Grad eines Divisors, der y_i enthält, also $[k(x_i) : k] \geq [\kappa(y_i) : \kappa(v)] = [k' : k]$. Das zeigt $\kappa(x_i) = k'$. \square

Für einen Divisor Δ auf X bezeichne $T = T(\Delta) \subset S$ die kleinste Teilmenge, so daß der Abschluß Δ^c von Δ in $\mathcal{X}_T := \mathcal{X} \times_S S \setminus T$ über $S \setminus T$ etal ist. Sei nun $D = \{x_1, \dots, x_d\}$ wie in Lemma 6.2.4. Dann definieren wir für alle $\Delta_r = \{x_1, \dots, x_r\}$ mit $r < d$

$$I(D - \Delta_r, \Delta_r) = \{v \in T(\Delta_r) \mid \text{für alle } x \in D - \Delta_r \text{ gilt } x^c \times_S \kappa(v) \subset \Delta_r^c \times_S \kappa(v)\}$$

und setzen $I(D) = \bigcup_{1 \leq r < d} I(D - \Delta_r, \Delta_r)$. Bezeichne $T \subset S$ die Menge der in k'/k verzweigten Primstellen, und sei $T' = T \times_S S'$.

Korollar 6.2.5. *Der Divisor D in Lemma 6.2.4 kann zusätzlich so gewählt werden, daß $I(D) \subset T$ gilt.*

Beweis. Aus der Definition ersieht man sofort, daß $I(D - \Delta_r, \Delta_r) \subset I(D - \Delta_{r'}, \Delta_{r'})$ für $r' > r$ und insbesondere $I(D) = I(D - \Delta_{d-1}, \Delta_{d-1})$ gilt. Um nun $I(D) \subset T$ zu garantieren, müssen wir die z_i spezieller wählen.

Sei $N := [k' : k]$ und $T'_N := \{w \in S' \mid \#\kappa(w) < (d-1)N\}$. Wir wählen nun ein beliebiges Element z_1 mit $z_1 \equiv \bar{z}_1 \pmod{(v')}$. Daraufhin liefert der Chinesische Restsatz für alle $1 < j < d$ Elemente z_j mit

$$z_j \equiv \bar{z}_j \pmod{(v')} \quad \text{und} \quad z_j \equiv \bar{z}_1 \pmod{(\tilde{v}')}$$

für alle $\tilde{v}' \in T'_N$. Wie im Lemma wird dadurch ein Divisor $\Delta_{d-1} = \{x_1, \dots, x_{d-1}\}$ definiert. Sei $T_{d-1} = T(\Delta_{d-1})$ und $T'_{d-1} = T_{d-1} \times_S S'$. Sei $G = \text{Gal}(k'/k)$. Schließlich wählen wir jetzt z_d mit

$$z_d \equiv \bar{z}_d \pmod{(v')} \quad \text{und} \quad z_d \not\equiv z_j^\sigma \pmod{(\hat{v}')}$$

für alle $1 \leq j \leq d$, $\hat{v}' \in T'_{d-1} - T'$ und $\sigma \in G$. Der dadurch definierte Punkt $x_d = p(x'_d)$ erfüllt alle Bedingungen. Insbesondere gilt $x_d^c \times_S \kappa(\hat{v}') \not\subset \Delta_{d-1}^c \times_S \kappa(\hat{v}')$ für alle $\hat{v}' \in T_{d-1} - T$ und also nach Definition $I(D - \Delta_{d-1}, \Delta_{d-1}) \subset T$.

Allerdings ist es a priori nicht klar, ob die Fasern über \hat{v}' genügend rationale Punkte enthalten, um $z_d \not\equiv z_j^\sigma \pmod{(\hat{v}')}$ zu garantieren. Nach Konstruktion betrifft das nur die $\hat{v}' \in T'_N \subset T'_{d-1}$. Da $N = \#G$ keine Primzahlpotenz ist, folgt $\#\kappa(\hat{v}') > N$ für alle $\hat{v}' \in T'_N$, und also ist alles gezeigt, falls wir $x_j^c \times_S \kappa(\hat{v}') = x_1^c \times_S \kappa(\hat{v}')$ für alle $\hat{v}' \in T'_N$ und $1 < j < d$ zeigen können, wobei x_j^c den Abschluß von x_j in \mathcal{X} bezeichnet. Dazu beachte man, daß nach Konstruktion für alle $\sigma \in G$ und $\hat{v}' \in T'_N$ gilt: $z_j^\sigma - z_1^\sigma \in ((\hat{v}')^\sigma)$. Da aber T'_N in natürlicher Weise eine G -Menge ist, ist das äquivalent zu

$$z_j^\sigma \equiv z_1^\sigma \pmod{(\hat{v}'^\tau)} \tag{6.2}$$

für alle $\sigma, \tau \in G$ und eine Fortsetzung $\hat{v}' | \hat{v}$ für $\hat{v} \in T_N$. Bezeichne $f_j(t) \in \mathbb{Z}[t]$ die normierte, definierende Gleichung für den Punkt x_j , $j = 1, \dots, d-1$. Wir wollen für alle $1 < j < d$ und $\hat{v} \in T_N$ zeigen:

$$\mathbb{Z}_{\hat{v}}[t]/f_1(t) \otimes \kappa(\hat{v}) \simeq \mathbb{Z}_{\hat{v}}[t]/f_j(t) \otimes \kappa(\hat{v}).$$

Sei $\mathcal{O}_j = \mathbb{Z}[t]/f_j(t)$. Wegen $\hat{v} \notin T$ ist $\mathcal{O}_j \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\hat{v}}$ regulär und wegen $\kappa(x_i) = \kappa(x_j)$ insbesondere $\mathcal{O}_i \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\hat{v}} \simeq \mathcal{O}_j \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\hat{v}} = \mathcal{O}_{\hat{v}}$ für $i \neq j$. Da $\mathcal{O}_{\hat{v}}$ treuflach ist, reicht es,

$$\mathcal{O}_{\hat{v}} \otimes \mathbb{Z}_{\hat{v}}[t]/f_1(t) \otimes \kappa(\hat{v}) \simeq \mathcal{O}_{\hat{v}} \otimes \mathbb{Z}_{\hat{v}}[t]/f_j(t) \otimes \kappa(\hat{v}) \quad (6.3)$$

für alle $1 < j < d$ und $\hat{v} \in T_N$ zu zeigen. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\hat{v}} \otimes \mathbb{Z}_{\hat{v}}[t]/f_j(t) \otimes \kappa(\hat{v}) &\simeq \prod_{\sigma \in G} \mathcal{O}_{\hat{v}}[t]/(t - z_j^\sigma) \otimes_{\mathcal{O}_{\hat{v}}} \prod_{\hat{v}'|\hat{v}} \kappa(\hat{v}') \\ &\simeq \prod_{\sigma \in G, \tau \in G/D_{\hat{v}'}} \kappa(\hat{v}'^\tau)[t]/(t - \overline{z_j^\sigma}) \end{aligned}$$

für ein $\hat{v}'|\hat{v}$, wobei $D_{\hat{v}'}$ die Zerlegungsgruppe von \hat{v}' in G und $\overline{z_j^\sigma}$ die Reduktion von z_j^σ modulo \hat{v}'^τ bezeichnet. Daraus folgt (6.3) mittels (6.2). \square

6.2.2 Realisierung abelscher Gruppen

Mit der Existenz von guten Divisoren läßt sich jetzt die reguläre Realisierbarkeit abelscher Gruppen unabhängig von der Charakteristik zeigen.

Satz 6.2.6. *Sei entweder $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim, $\ell \neq 2$ eine fest gewählte Primzahl mit $\ell \nmid (p-1)$ und G eine endliche abelsche Gruppe von Ordnung ℓ^n . Dann gibt es eine geometrisch zusammenhängende, galoissche Überlagerung $Y \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ mit Automorphismengruppe G , die, falls $\ell \neq p$, nur in n Punkten mit jeweils galoissem Restklassenkörper verzweigt.*

Insbesondere ist Behauptung 1 für abelsche Gruppen richtig.

Beweis. Wegen $\text{cd}_p G_K(p) = 1$ für einen beliebigen Körper K der Charakteristik p [Ser94] sei o.E. im Funktionenkörperfall $\ell \neq p$.

Der tschebotareffsche Dichtigkeitssatz liefert uns eine ℓ -reguläre Stelle v_0 , die in $k(\zeta_{\ell^n})/k$ träge ist. Dann wählen wir eine zu $\ell(\ell-1)$ relativ prime Zahl m mit $m\ell^{n-1}(\ell-1) > N(\ell, n)$, wobei $N(\ell, n)$ den Ausdruck aus Satz 5.1.4 bezeichnet. Sei $Y_{v_0} = \mathbb{P}_{\kappa(v_0)}^1$. Nach Satz 5.1.4 existiert dann ein ℓ^n -Scholzdivisor \overline{D} bestehend aus n abgeschlossenen Punkten vom Grad $m\ell^{n-1}(\ell-1)$ und ein Epimorphismus $\overline{\psi} : \pi_1(Y_{v_0} \setminus \overline{D}) \rightarrow G$, der eine Scholzüberlagerung mit Gruppe G beschreibt. Zuzufolge Lemma 6.2.4 existiert ein v_0 -guter Divisor D auf X mit $D^c \times_S \kappa(v_0) = \overline{D}$. Nach Lemma 2.1.6 und Proposition 2.1.9 ist v_0 ein ℓ -Blochpunkt von $X \setminus D$. Folglich gibt es auch eine globale Galoisüberlagerung $\psi : \pi_1(X \setminus D) \rightarrow G$ (Proposition 2.2.2 oder Korollar 2.2.5). Da v_0 insbesondere ein gewöhnlicher Punkt ist, gilt nach Korollar 2.1.5 die Isomorphie $\pi_1^{\text{ab}}(\overline{X \setminus D})_{G_k} \simeq \pi_1^{\text{ab}}(\overline{Y_{v_0} \setminus \overline{D}})_{G_{\kappa(v_0)}}$ und ferner $\psi|_{\pi_1^{\text{ab}}(\overline{X \setminus D})_{G_k}} = \overline{\psi}|_{\pi_1^{\text{ab}}(\overline{Y_{v_0} \setminus \overline{D}})_{G_{\kappa(v_0)}}}$. Da die letzte Abbildung, die Einschränkung von $\overline{\psi}$, nach Konstruktion surjektiv auf G geht, trifft das auch für die Einschränkung von ψ zu. Folglich beschreibt ψ eine geometrische Galoisüberlagerung mit Gruppe G . \square

Bemerkung 6.2.7. In [GJ98, S. 40] wird gezeigt, daß jede reguläre Realisierung von G über Y_{v_0} mindestens n Verzweigungspunkte besitzt. Folglich kann eine reguläre Realisierung von G über X nicht mit weniger Punkten auskommen. In dieser Hinsicht ist Satz 6.2.6 optimal.

Bemerkung 6.2.8. Indem man Lemma 6.2.4 etwas verallgemeinert, ist es möglich, die Bedingung $\ell \nmid (p-1)$ im Funktionenkörperfall zu eliminieren.

6.3 Realisierbarkeit nilpotenter Gruppen

Wir diskutieren nun eine spezielle Klasse von Divisoren, deren Existenz die reguläre Realisierbarkeit nilpotenter Gruppen gewährleisten würde.

6.3.1 Exzellente Divisoren

Wir benutzen die selben Bezeichnungen wie in §6.2. Sei $D = \{x_1, \dots, x_d\}$ ein v -guter Divisor auf X . Dann ist für alle $r \leq d$ die Restriktionsabbildung

$$H^1(X \setminus \Delta_r) \rightarrow H^1(X_v \setminus \Delta_{r,v}),$$

wobei wir $H^1(\cdot)$ anstelle $H^1(\cdot, \mathbb{Z}/\ell)$ schreiben, surjektiv. Bedenkt man aber die Tatsache, daß \mathcal{X} zwei-dimensional ist, so sollte man erwarten können, daß ein Element aus $H^1(X \setminus \Delta_r)$ zusätzlich noch Vorgaben entlang horizontaler Divisoren realisiert, bzw. abgeschlossener Punkte von X , realisiert. Dazu setzen für eine Menge M abgeschlossener Punkte $H(M) = \bigoplus_{x \in M} H^1(x)$. Für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X \setminus \Delta_r$ induziert die Einbettung $x \hookrightarrow X$ eine Abbildung $H^1(X \setminus \Delta_r) \rightarrow H^1(x)$. Aus Funktorialitätsgründen erhalten wir dann für jede Menge M abgeschlossener Punkte von $X \setminus \Delta_r$ eine Abbildung

$$H^1(X \setminus \Delta_r) \rightarrow H(M) \times_{H(M_v)} H^1(X_v \setminus \Delta_{r,v}).$$

Die Frage, ob, beziehungsweise unter welchen Voraussetzungen, auch diese Abbildung surjektiv ist, läßt sich momentan scheinbar nicht entscheiden. Die Gründe dafür diskutieren wir ausführlich in §6.3.2.

Spezieller kann man auch eine relative Version der Frage betrachten. Sei dazu $T_r = T(\Delta_r) \subset S$ die kleinste Teilmenge, so daß der Abschluß Δ_r^c von Δ_r in $\mathcal{X}_{T_r} := \mathcal{X} \times_S S \setminus T_r$ über $S \setminus T_r$ étal ist. Für $x \in X \setminus \Delta$ setzen wir $x_{T_r}^c = \{x\}^c \times_S \mathcal{X}_{T_r} \setminus \Delta^c$, und für $x_v \in X_v$ schreiben wir x_v^c anstelle $\{x_v\}^c$. Dann erhält man für jede Menge M abgeschlossener Punkte von $X \setminus \Delta_r$ und $v \notin T_r$ eine Abbildung

$$\chi_r : H^1(\mathcal{X}_{T_r} \setminus \Delta_r^c) \rightarrow \tilde{H}(M) \times_{\tilde{H}(M_v)} H^1(\mathcal{X}_v \setminus \Delta_{r,v}^c), \quad (6.4)$$

wo wir $\tilde{H}(M) = \bigoplus_{x \in M} H^1(x_{T_r}^c)$, falls $M \subset X \setminus \Delta_r$, und $\tilde{H}(M) = \bigoplus_{x \in M} H^1(x_v^c)$, falls $M \subset X_v \setminus \Delta_{r,v}$ gilt, setzen. Ebenso wie im absoluten Fall, läßt sich die Frage der Surjektivität von χ_r zum jetzigen Zeitpunkt nicht entscheiden. Das ist insofern bemerkenswert, da alle beteiligten Gruppen sogar endlich sind.

Jetzt wollen wir erst einmal zeigen, wie mit einer positiven Antwort auf die letzte Frage die reguläre Realisierbarkeit nilpotenter Gruppen folgt.

Dazu führen wir die folgende Sprechweise ein. Wir sagen ein Divisor D auf X heißt *v-exzellente*, falls er *v-gut*, die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x)/k$ für alle $x \in D$ galoissch und für jede Numerierung $D = \{x_1, \dots, x_d\}$ und alle $\Delta_r = \{x_1, \dots, x_r\}$ mit $r < d$ die obige Abbildung χ_r aus (6.4) für $M = D - \Delta_r$ surjektiv ist.

Sei jetzt wieder $k = \mathbb{Q}$ oder $k = \mathbb{F}_p(t)$ mit p prim und $S = S_k$ ein reguläres Modell von k . Für $v \in S_0$ bezeichne I_v die absolute Trägheitsgruppe von v in G_k . Ferner sei $\ell \neq 2$ eine Primzahl mit $\ell \nmid p(p-1)$. Die Menge der Teiler von ℓ sei mit T_ℓ bezeichnet.

Um Bezeichnungen festzulegen, betrachten wir für $\Delta \subset X$ abgeschlossen ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta)$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \pi_1(X \setminus \Delta) & & \\ & & & & \downarrow \rho & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\alpha} & G \longrightarrow 1. \end{array}$$

Für jeden Divisor $\Delta' \supseteq \Delta$ auf X bezeichne $\mathcal{S}(k, \Delta')$ das durch $\pi_1(X \setminus \Delta') \twoheadrightarrow \pi_1(X \setminus \Delta)$ induzierte Scholzproblem.

Das technische Herzstück unseres Beweises ist

Satz 6.3.1. *Sei $\mathcal{S}(k, \Delta)$ ein ℓ^n -Scholzproblem mit (ℓ -regulärer) Ausnahmemenge $T \supset T_\ell$, so daß ρ in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist. Ferner sei $v_0 \in (S \setminus T)_0$ ein ℓ -regulärer Punkt und $D = \{x_1, \dots, x_d\}$ ein v_0 -exzellenter Divisor mit den folgenden Eigenschaften:*

- a) $\Delta = \Delta_r = \{x_1, \dots, x_r\} \subset D$ mit $r < d$,
- b) D^c ist fast etal über $S \setminus T$ und $I(D) \subset T$,
- c) $\rho(\pi_1(x_i)) = 1$, für $r < i \leq d$; d.h. x_i ist in ρ voll zerlegt,
- d) das lokale Scholzproblem $\mathcal{S}(k_{v_0}, (\Delta \cup \{x_{r+1}\})_{v_0})$ besitzt eine ℓ^n -Scholzlösung ψ_{v_0} , die entlang der speziellen Faser unverzweigt ist und $\psi_{v_0}(\pi_1(x_{i,v_0})) = 1$ erfüllt für $r+1 < i \leq d$; d.h. alle x_{i,v_0} sind in ψ_{v_0} voll zerlegt.

Dann besitzt das Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_{r+1}\})$ eine ℓ^n -Scholzlösung ψ , die in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist, lokal bei v_0 die gegebene Lösung ψ_{v_0} induziert und in der alle x_i für $r+1 < i \leq d$ voll zerlegt sind.

Der Beweis dieses Satzes ist der Gegenstand von §6.4. Hier wollen wir nun zeigen, wie Satz 6.1.2 aus Satz 6.3.1 folgt. Wegen $\text{cd}_p G_K(p) = 1$ für einen beliebigen Körper K der Charakteristik p [Ser94] ist der Hauptsatz für $\ell = p = \text{ch}(k)$ trivial. Daher sei o.E. $\ell \neq p$.

Sei dazu G eine endliche ℓ -Gruppe von Ordnung ℓ^n . Dann besitzt G ein nicht-triviales Zentrum $Z(G)$ und insbesondere eine Untergruppe $C \simeq \mathbb{Z}/\ell$ von Ordnung

ℓ mit $C \leq Z(G)$. Der Quotient $G' = G/C$ ist wieder eine ℓ -Gruppe und wir erhalten somit eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow G' \rightarrow 0$ endlicher ℓ -Gruppen. So fortfahrend bekommen wir schließlich eine Folge endlicher ℓ -Gruppen $1 = G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(n)} = G$ zusammen mit einer Folge zentraler Erweiterungen

$$\varepsilon^{(i)} : 1 \rightarrow C \rightarrow G^{(i)} \xrightarrow{\alpha_i} G^{(i-1)} \rightarrow 1$$

für $1 \leq i \leq n$. Das Paar $(\{G^{(i)}\}_{0 \leq i \leq n}, \{\varepsilon^{(i)}\}_{1 \leq i \leq n})$ nennen wir ein *Realisierungssystem* für die Gruppe G .

Als nächstes wählen wir eine geeignete ℓ -reguläre Stelle in S . Dazu fixieren wir eine ganze Zahl $j > 1$ und eine (im Zahlkörperfall ℓ -reguläre) Primzahl $\ell' > \ell$ mit $\ell^j > N(\ell, n)$, wobei $N(\ell, n)$ den Ausdruck aus Satz 5.1.4 bezeichnet. Bezeichne $k(\zeta_{\ell'^{j+1}})^+/k$ den Zwischenkörper vom Grad ℓ'^j in $k(\zeta_{\ell'^{j+1}})/k$. Der tschebotareffsche Dichtigkeitssatz gibt uns eine ℓ -reguläre Stelle v_0 , die in der zyklischen Erweiterung $k(\zeta_{\ell^n})k(\zeta_{\ell'^{j+1}})^+/k$ vom Grad $\ell^j \ell^{n-1}(\ell - 1)$ träge bleibt.

Wir setzen $\overline{D}^{(0)} = \emptyset$ und $\overline{\psi}_0 = 1$. Sei $Y_{v_0} = \mathbb{P}_{\kappa(v_0)}^1$. Da $\overline{\psi}_0$ trivialerweise eine Scholzüberlagerung ist, können wir ein ℓ^n -Scholzproblem $\mathcal{S}(\kappa(v_0), \overline{D}^{(0)})$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \pi_1(Y_{v_0} \setminus \overline{D}^{(0)}) & & \\ & & & & \downarrow \overline{\psi}_0 & & \\ 1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G^{(1)} & \xrightarrow{\alpha_i} & G^{(0)} \longrightarrow 1. \end{array}$$

definieren. Nach Satz 5.1.4 existiert ein Divisor $\overline{D}^{(1)}$, so daß das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(\kappa(v_0), \overline{D}^{(1)})$ eine Schollösung $\overline{\psi}_1$ besitzt. Damit läßt sich jetzt ein neues ℓ^n -Scholzproblem für $G^{(2)}$ definieren. Durch Induktion bekommen wir schließlich eine Folge $\overline{D}^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, von Divisoren auf Y_{v_0} und Scholzüberlagerungen $\overline{\psi}_i : \pi_1(Y_{v_0} \setminus \overline{D}^{(i)}) \rightarrow G^{(i)}$ mit $\alpha_i \circ \overline{\psi}_i = \overline{\psi}_{i-1}$. Ferner gilt $\overline{D}^{(i-1)} \subset \overline{D}^{(i)}$ und $\deg(y) = \ell^j \ell^{n-1}(\ell - 1)$ für alle $y \in \overline{D}^{(n)}$. Insbesondere liefert $\overline{\psi}_n$ eine reguläre Realisierung von G über Y_{v_0} .

Die Filtration von $\overline{D} = \overline{D}^{(n)}$ durch die $\overline{D}^{(i)}$ definiert eine Numerierung $\overline{D} = \{y_1, \dots, y_n\}$ mit $y_i \in \overline{D}^{(i)} - \overline{D}^{(i-1)}$. Man beachte, nach Satz 5.1.4 ist $\#(\overline{D}^{(i)} - \overline{D}^{(i-1)}) = 1$. Bezeichne T die Menge der Teiler von ℓ und ℓ' . Nach Konstruktion ist T eine ℓ -reguläre Menge. Nach Voraussetzung gibt es einen über $S \setminus T$ fast etalen, v_0 -exzellenten Divisor $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, der Voraussetzung b) aus Satz 6.3.1 erfüllt und für alle $\Delta_r = \{x_1, \dots, x_r\}$, $1 \leq r \leq n$, gilt $\Delta_r^c \times_{\mathcal{X}} Y_{v_0} = \overline{D}^{(r)}$.²⁾

Wir konstruieren nun eine Folge $\psi_i : \pi_1(X \setminus \Delta_i) \rightarrow G^{(i)}$ von ℓ^n -Scholzüberlagerun-

²⁾Nach Korollar 6.2.5 läßt sich ein D finden, daß bis auf die Surjektivität von χ_r alle Bedingungen erfüllt.

gen mit $\alpha_i \circ \psi_i = \psi_{i-1}$ und so, daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
& \pi'_1(X_{v_0} \setminus \Delta_{i,v_0}) & \\
& \swarrow \iota & \searrow R \\
\pi'_1(X \setminus \Delta_i) & & \pi'_1(Y_{v_0} \setminus \overline{D}^{(i)}) \\
& \searrow \psi_i & \swarrow \overline{\psi}_i \\
& G^{(i)} &
\end{array} \tag{6.5}$$

wobei ι durch die Projektion $X_{v_0} \setminus \Delta_{i,v_0} \rightarrow X \setminus \Delta_i$ induziert und R die Reduktionsabbildung aus (5.6) ist. Man beachte, daß insbesondere alle Δ_i bei v_0 etal sind. Die Konstruktion der ψ_i erfolgt nun mittels Induktion. Sei dazu jetzt $\psi_0 = 1$. Dann erfüllt ψ_0 zusammen mit D trivialerweise die Voraussetzungen von Satz 6.3.1. Nach Induktionsvoraussetzung existiert für $i < n$ eine ℓ^n -Scholzüberlagerung $\psi_i : \pi_1(X \setminus \Delta_i) \twoheadrightarrow G^{(i)}$, die zusätzlich zu den eben geforderten Eigenschaften noch die Voraussetzungen von Satz 6.3.1 erfüllt. Wie bereits in Satz 5.2.10 gezeigt wurde, besitzt das Scholzproblem

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \pi_1(X_{v_0} \setminus \Delta_{i+1,v_0}) & & & \\
& & & \downarrow \psi_{i,v_0} & & & \\
1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G^{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_i} & G^{(i)} \longrightarrow 1.
\end{array}$$

eine ℓ^n -Scholzlösung $\psi_{i+1}^{v_0}$ mit $\psi_{i+1}^{v_0} = \overline{\psi}_{i+1} \circ R$, in der alle $x \in D_{v_0} - \Delta_{i+1,v_0}$ voll zerlegt sind. Demnach erfüllt das ℓ^n -Scholzproblem

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \pi_1(X \setminus \Delta_{i+1}) & & & \\
& & & \downarrow \psi_i & & & \\
1 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & G^{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_i} & G^{(i)} \longrightarrow 1.
\end{array}$$

mit Ausnahmenmenge T und v_0 -exzellente Divisor D die Voraussetzungen von Satz 6.3.1. Dieser besagt aber, daß es eine Abbildung $\psi_{i+1} : \pi_1(X \setminus \Delta_{i+1}) \twoheadrightarrow G^{(i+1)}$ mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Die Kommutativität des Diagramms (6.5) folgt wegen $\psi_{i+1} \circ \iota = \psi_{i+1,v_0} = \psi_{i+1}^{v_0} = \overline{\psi}_{i+1} \circ R$.

Mit $\psi_n : \pi_1(X \setminus \Delta_n) \twoheadrightarrow G^{(n)} = G$ erhalten wir die gesuchte reguläre Realisierung von G über \mathbb{P}_k^1 . Damit ist Satz 6.1.2 bewiesen.

6.3.2 Existenzfrage für exzellente Divisoren

Nachdem wir nun gesehen haben wofür exzellente Divisoren gut wären, wollen wir jetzt die Probleme, die einem Existenzbeweis für solche Divisoren im Wege stehen, diskutieren. Diese zeigen sich bereits im einfachsten Fall, nämlich eines Divisors bestehend aus zwei abgeschlossenen Punkten.

Sei nun also $D = \{x_1, x_2\}$ ein v -guter Divisor, mit über k galoisschen Restklassenkörpererweiterungen $k' := \kappa(x_1) = \kappa(x_2)$. Sei $G = \text{Gal}(k'/k)$. Nach Definition gibt

es eine eindeutige Liftung $x_{1,v}, x_{2,v}$ von x_1, x_2 unter $x_v \rightarrow X$. Wir sind interessiert an der Surjektivität der Abbildung

$$\chi = \chi_1 : H^1(X \setminus \{x_1\}) \rightarrow H^1(x_2) \times_{H^1(x_{2,v})} H^1(X_v \setminus \{x_{1,v}\}).$$

Um das Problem noch weiter zu vereinfachen, stellen wir uns die Frage, ob eigentlich

$$\{e\} \times_{H^1(x_{2,v})} H^1(X_v \setminus \{x_{1,v}\}) \subset \text{im } \chi$$

gilt. Das ist äquivalent dazu, daß in dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & H^1(X \setminus \{x_1\}) & \longrightarrow & H^1(x_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K_v & \longrightarrow & H^1(X_v \setminus \{x_{1,v}\}) & \longrightarrow & H^1(x_{2,v}) \end{array}$$

die linke, vertikale Abbildung surjektiv ist. Dafür betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(k) & \longrightarrow & H^1(X \setminus \{x_1\}) & \longrightarrow & H^1(\overline{X \setminus \{x_1\}})^{G_k} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\kappa(x))^G & \longrightarrow & \tilde{H}^1(x) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(x)/H^1(\kappa(x))^G \longrightarrow 0, \end{array}$$

wo $\tilde{H}^1(x) = \text{im}(\iota_x^* : H^1(X \setminus \{x_1\}) \rightarrow H^1(x))$. Bezeichne \overline{K} den Kern der rechten, vertikalen Abbildung. Zusammen mit dem entsprechenden lokalen Diagramm erhalten wir daraus

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\kappa(x)/k) & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \overline{K} \longrightarrow H^2(\kappa(x)/k) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\kappa(x_v)/k_v) & \longrightarrow & K_v & \longrightarrow & \overline{K}_v \longrightarrow H^2(\kappa(x_v)/k_v). \end{array}$$

Die beiden äußeren, vertikalen Abbildungen sind, da D v -gut ist, bijektiv, die beiden inneren injektiv. Daraus folgt, wenn die Abbildung $K \rightarrow K_v$ surjektiv ist, so ist sie — und folglich auch χ — bereits bijektiv. Aus dem vorstehenden Diagramm sieht man, daß das genau dann der Fall ist, wenn $\overline{K} \rightarrow \overline{K}_v$ surjektiv bzw. $\tilde{H}^1(x)/H^1(\kappa(x))^G \rightarrow \tilde{H}^1(x_v)/H^1(\kappa(x_v))^G$ injektiv ist. Das trifft trivialerweise zu, falls x_2 ein k -rationaler Punkt ist. Andernfalls beachte man, nach (2.3) gilt $H^1(\overline{X \setminus \{x_1\}})^{G_k} \simeq \mathbb{Z}/\ell(1)^{G_{\kappa(x_1)}}$, und folglich ist entweder $\overline{K} = 0$ oder $\overline{K} \simeq \mathbb{Z}/\ell$. Eine Antwort auf diese Frage hängt vom Bild von $\pi(x_2)$ in $\pi_1^{\text{ab}}(X \setminus \{x_1\})$ ab. Um nun x_2 geeignet zu wählen, müßte man verstehen wie das Bild von der Wahl von x_1 und x_2 abhängt. Diese Frage scheint jedoch außerhalb der Reichweite der gegenwärtig bekannten Methoden zu liegen!

Um nun aber zu sehen, daß die Erwartung an χ nicht gar zu unsinnig ist, betrachten wir für einen beliebigen horizontalen Divisor D auf \mathcal{X} mit $D \times_S \kappa(v) = \{y_1\}$, wo y_i die Spezialisierung von x_i bei v ist, die natürliche Abbildung

$$\tilde{\chi} : H^1(\mathcal{X} \setminus D) \rightarrow H^1((x_2)_D^c) \times H^1(y_2)H^1(Y_v \setminus \{y_1\}) \subset H^1(x_2) \times_{H^1(x_{2,v})} H^1(X_v \setminus \{x_{1,v}\}).$$

mit $(x_2)_D^c = x_2^c \times_S \mathcal{X} \setminus D$. Dann gilt

Proposition 6.3.2. *Für jedes $\alpha \in H^1((x_2)_D^c) \times H^1(y_2)H^1(Y_v \setminus \{y_1\})$ existiert ein Divisor D wie oben, so daß $\alpha \in \text{im } \tilde{\chi}$ gilt.*

Beweis. Die Aussage folgt aus dem allgemeinen Grunwald-Wang-Satz in [Mik78]. \square

Die Proposition legt nahe, daß mit einem gegebenen Verzweigungsdivisor nicht jede beliebige lokale Vorgabe realisiert werden kann. Insbesondere kann es also passieren, daß alle geometrischen \mathbb{Z}/ℓ -Erweiterungen von $X = \mathbb{P}_k^1$, die nur in x_1 verzweigen, aber dort auch verzweigt sind, in x_2 nicht vollständig zerlegt sind, obwohl die induzierte Überlagerung von X_v in $x_{2,v}$ vollständig zerfällt. Wegen $H^1(\overline{X} \setminus \{x_1\})^{G_k} \simeq \mathbb{Z}/\ell(1)^{G_{\kappa(x_1)}}$ bedeutet das, daß es überhaupt so eine Überlagerung von X gibt. Es ist gerade und nur in diesem Fall, daß $0 = \overline{K} \rightarrow \overline{K}_v \simeq \mathbb{Z}/\ell$ nicht surjektiv ist. D.h. die Frage ist also, ob man x_2 so wählen kann, daß es eine \mathbb{Z}/ℓ -Erweiterungen von $X = \mathbb{P}_k^1$ gibt, die nur in x_1 verzweigt und in x_2 vollständig zerlegt ist?

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß bereits aus der Surjektivität von χ die reguläre Realisierung nichtabelscher Gruppen folgt. Genauer lassen sich alle ℓ -Gruppen von Ordnung ℓ^3 realisieren, worunter bereits nichtabelsche Gruppen sind.

6.4 Der Beweis von Satz 6.3.1

Es gelten die Notationen aus Satz 6.3.1 und §6.3.1. Sei $s : \text{Spec } k \rightarrow X \setminus D$ ein Schnitt und $x_0 := s(\text{Spec } k)$, sowie $x' = x_{r+1}$. Der Beweis erfolgt in 3 Schritten:

- 1.) das induzierte Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ besitzt eine Lösung $\tilde{\psi}$;
- 2.) wir ändern $\tilde{\psi}$ zu einer Lösung $\hat{\psi}$ von $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ ab, die in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist;
- 3.) wir ändern die durch $\hat{\psi}$ induzierte Lösung von $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0, x'\})$ zu einer Scholz-lösung, die die Bedingungen des Satzes erfüllt und über $\pi_1(X \setminus (\Delta \cup \{x'\}))$ faktorisiert, ab.

Bezeichne ξ_v den generischen Punkt der speziellen Faser der lokalen Kurve $\mathcal{X}_v = \mathbb{P}_{S_v}^1$, wo $S_v = \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}_{S,v}$, K_{ξ_v} den Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}_v, \xi_v}$ und I_{ξ_v} die absolute Trägheitsgruppe von $\pi_1(K_{\xi_v})$. Wegen der Inklusion $k_v \hookrightarrow K_{\xi_v}$ und aus Funktorialitätsgründen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & I_{\xi_v} & \longrightarrow & \pi_1(K_{\xi_v}) & \longrightarrow & \pi_1(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}_v, \xi_v}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & I_v & \longrightarrow & \pi_1(k_v) & \longrightarrow & \pi_1(S_v) \longrightarrow 1. \end{array} \quad (6.6)$$

Lemma 6.4.1. *Sei $p = \text{ch}(\kappa(v))$. Dann ist $I_{\xi_v}^{(p')} \rightarrow I_v^{(p')}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Dafür bezeichne A^{sh} die strikte Henselisierung eines lokalen Ringes A , und $K_{\xi_v}^{sh}$ bzw. k_v^{sh} den Quotientenkörper von $A = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}_v, \xi_v}^{sh}$ bzw. $B = \widehat{\mathcal{O}}_{S, v}^{sh}$. Wegen (6.6) gilt $\pi_1(K_{\xi_v}^{sh}) = I_{\xi_v}$ und $\pi_1(k_v^{sh}) = I_v$. Bezeichne v_A bzw. v_B die diskreten Bewertungen von A bzw. B . Dann gilt $v_A|B = v_B$ und

$$v_A(K_{\xi_v}^{sh \times}) = v_B(k_v^{sh \times}) = \nu \quad (6.7)$$

[Bourbaki, Alg. comm., Ch. VI §10 no 1 Prop. 2]. Sei nun E/k_v^{sh} eine rein zahlverzweigte Galoiserweiterung und B' der ganze Abschluß von B in E . Wir haben zu zeigen, daß $\text{Spec}(B' \otimes_B A)$ zusammenhängend ist. Wegen $B' = B[x]/(x^m - \pi)$ für ein Primelement π von B , reicht es dafür zu zeigen, daß $x^m - \pi$ in $B[x]$ genau dann irreduzibel ist, wenn es das in $A[x]$ ist. Wegen $B \subset A$ ist eine Richtung trivial. Sei also $x^m - \pi$ in $B[x]$ irreduzibel und $\Pi \in A$ eine Lösung. Dann ist $v_A(\pi) = v_B(\Pi^m) = mv_A(\Pi)$, also $v_A(\Pi) = \frac{1}{m}v_A(\pi)$. Wegen $v_A(\pi) = v_B(\pi) = 1$ ist die Existenz von Π ein Widerspruch zu (6.7). Daraus folgt, daß auch $E \otimes_{k_v^{sh}} K_{\xi_v}^{sh}$ ein Körper ist. Das zeigt die Surjektivität von $\pi_1(K_{\xi_v}^{sh}) \rightarrow \pi_1(k_v^{sh})$ [SGA 1, V, Prop. 6.9].

Für die Injektivität ist zu zeigen, daß für jede Erweiterung $F/K_{\xi_v}^{sh}$ eine Erweiterung E/k_v^{sh} mit $F \hookrightarrow E \otimes_{k_v^{sh}} K_{\xi_v}^{sh}$ existiert. Bezeichnet A' den ganzen Abschluß von A in F , so gilt $A' = A[x]/(x^m - \pi')$ für ein Primelement $\pi' \in A$. Sei π eine Uniformisierende von B und nach (6.7) auch von A . Setze $B' = B[x]/(x^m - \pi)$. Dann gilt $A' \simeq B' \otimes_B A =: \tilde{A}$. Denn es existiert eine Einheit $u \in A^\times$ mit $\pi' = \pi u$. Da A strikt henselsch ist, besitzt die Gleichung $x^m - u^{-1}$ eine Lösung $v \in A$, und folglich gilt

$$A' = A[x]/(x^m - \pi') \simeq A[x]/((xv)^m - \pi) \simeq \tilde{A}$$

wie behauptet. □

Für einen beliebigen Divisor $\bar{\Delta} \supset \Delta$ bezeichne $\mathcal{L}_{\bar{\Delta}}$ die Menge der Lösungen des Einbettungsproblems $\mathcal{S}(k, \bar{\Delta})$. Ist $\mathcal{L}_{\bar{\Delta}}$ nicht leer, so ist die Lösungsmenge genauer ein prinzipal-homogener Raum über $H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)$ mit $C = \text{Kern } \mathcal{S}(k, \bar{\Delta})$. Die Operation von $\theta \in H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)$ auf $\psi \in \mathcal{L}_{\bar{\Delta}}$ wird gegeben durch ${}^\theta\psi(g) = \theta(g)\psi(g)$ für $g \in \pi_1(X \setminus \bar{\Delta})$. Hierbei ist zu beachten, daß sowohl θ als auch ${}^\theta\psi(g)$ Homomorphismen sind. Da nämlich C in E zentral ist, operiert G und daher auch $\pi_1(X \setminus \bar{\Delta})$ trivial auf C ; insbesondere gilt also $\theta(g)\psi(g) = \psi(g)\theta(g)$. Die zu $X_{v_0} \setminus \bar{\Delta}_{v_0} \rightarrow X \setminus \bar{\Delta}$ gehörige Restriktionsabbildung induziert einen Morphismus prinzipal-homogener Räume, d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C) \times \mathcal{L}_{\bar{\Delta}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\bar{\Delta}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1((X \setminus \bar{\Delta})_{v_0}, C) \times \mathcal{L}_{\bar{\Delta}_{v_0}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\bar{\Delta}_{v_0}} \end{array} \quad (6.8)$$

Beweis von Satz 6.3.1. Wir folgen der eingangs angegebenen Strategie.

Schritt 1: Das Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta \cup \{x_0\})$ besitzt eine Lösung $\check{\psi}$.

Sei $\tilde{\Delta} := \Delta \cup \{x_0\}$. Wir können o.E. $\mathcal{S}(k, \tilde{\Delta})$ als nichtzerfallend annehmen. Wegen Korollar 1.3.13 reicht es zu zeigen, daß jedes der induzierten lokalen Einbettungsprobleme $\mathcal{S}(k_v, \tilde{\Delta}_v)$ für $v \notin T$ eine Lösung besitzt. Für die archimedischen Stellen ist das wegen $\ell \neq 2$ klar (Lemma 5.2.1). Sei nun $v \notin T$ eine nicht-archimedische Stelle. Dann ist $\mathcal{S}(k_v, \tilde{\Delta}_v)$ ein Scholzproblem (Lemma 4.3.2), was wegen $v \nmid \ell$ zufolge Proposition 5.2.8 eine Lösung besitzt. Folglich existiert eine globale Lösung $\check{\psi}$ für $\mathcal{S}(k, \tilde{\Delta})$.

Schritt 2: Das Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \tilde{\Delta})$ besitzt eine Lösung $\hat{\psi}$, die in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist.

Bezeichne $T_{\text{ver}} \subset S \setminus T$ diejenigen Punkte v , so daß $\check{\psi}$ entlang der Faser Y_v von \mathcal{X} über v verzweigt ist. Ferner bezeichne ξ_v den generischen Punkt von Y_v . Da ρ nach Voraussetzung für $v \in T_{\text{ver}}$ entlang Y_v unverzweigt ist, induziert die Komposition

$$I_{\xi_v} \rightarrow \pi_1(K_{\xi_v}) \rightarrow \pi_1(X \setminus \tilde{\Delta}) \xrightarrow{\check{\psi}} E, \quad (6.9)$$

wobei K_{ξ_v} der Quotientenkörper von $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}, \xi_v}$ und I_{ξ_v} die absolute Trägheitsgruppe von $\pi_1(K_{\xi_v})$ ist, eine Abbildung $\check{\psi}_{\xi_v} : I_{\xi_v} \rightarrow C$. Da $v \nmid \ell = \#C$ und C abelsch ist, definiert $\check{\psi}_{\xi_v}$ in Verbindung mit Lemma 6.4.1 eine Klasse α_v in $H^1(I_{\xi_v}, C)^{\pi_1(\xi_v)} \simeq H^1(I_v, C)^{\text{Fr}_v}$, wobei Fr_v den Frobenius an der Stelle v bezeichnet. Nach Wahl von k liefert Lemma 5.1.2 eine Klasse $\alpha \in H^1(k, C)$, die an den Stellen $v \notin T_{\text{ver}}$ unverzweigt ist und für alle $v \in T_{\text{ver}}$ gilt: $\text{res}_{I_v}^{G_k}(\alpha) = \alpha_v$. Nun bekommen wir aus der Komposition der ersten drei Homomorphismen in (6.9) mit dem Strukturmorphismus $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta}) \rightarrow \pi_1(k)$ und (6.6) das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(k, C) & \longrightarrow & H^1(X \setminus \tilde{\Delta}, C) & \longrightarrow & H^1(\overline{X \setminus \tilde{\Delta}}, C)^{G_k} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \text{res} & & \downarrow r_v & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^1(k_v, C) & \longrightarrow & H^1(K_{\xi_v}, C) & \longrightarrow & H^1(\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}_v^{sh}, \xi_v^{sh}}, C)^{G_{k_v}} \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^1(I_v, C) & \xrightarrow{\cong} & H^1(I_{\xi_v}, C) & & \end{array} \quad (6.10)$$

Somit induziert α eine Klasse $\varepsilon \in H^1(X \setminus \tilde{\Delta}, C)$, so daß, nach Wahl eines Schnitts $s : k \rightarrow X \setminus \tilde{\Delta}$, α mit $\varepsilon_{\text{ar}} = s^*(\varepsilon)$ identifiziert werden kann. Wegen $\varepsilon_{\text{geo}} = 0$ besagt (6.10), daß das Bild von $r_v(\varepsilon)$ in $H^1(I_{\xi_v}, C)$ mit dem von $\text{res}_{I_v}^{G_k}(\alpha) = \alpha_v$ unter $H^1(I_v, C) \rightarrow H^1(I_{\xi_v}, C)$ übereinstimmt. Insbesondere stimmt der durch ε induzierte Homomorphismus $\pi_1(X \setminus \tilde{\Delta}) \rightarrow C$ auf I_{ξ_v} mit $\check{\psi}_{\xi_v}$ überein. Folglich ist $\hat{\psi} = \varepsilon^{-1} \check{\psi}(g)$ eine Lösung von $\mathcal{S}(k, \tilde{\Delta})$, die entlang Y_v für $v \notin T$ unverzweigt ist.³⁾

³⁾Diagramm (6.10) macht Proposition 3.2.8 und ihren Beweis nicht hinfällig. Wegen $C \simeq \mathbb{Z}/\ell$ sind die ersten beiden Zeilen in (6.10) exakte Sequenzen von \mathbb{F}_ℓ -Vektorräumen und liefern daher direkte

Schritt 3: Das Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \tilde{\Delta} \cup \{x_0\})$ besitzt eine Lösung ψ , die die Bedingungen des Satzes erfüllt und über $\pi_1(X \setminus (\Delta \cup \{x'\}))$ faktorisiert.

Sei $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{x'\}$ und $\hat{\Delta} = \Delta \cup \{x_0, x'\}$. Nach Voraussetzung besitzt $\mathcal{S}(k_{v_0}, \bar{\Delta}_{v_0})$ und damit auch $\mathcal{S}(k_{v_0}, \hat{\Delta}_{v_0})$ eine Scholzlösung ψ_{v_0} . Andererseits induziert $\hat{\psi}$ auch eine Lösung $\hat{\psi}_{v_0}$ von $\mathcal{S}(k_{v_0}, \hat{\Delta}_{v_0})$. Daher existiert eine Kohomologieklass $\theta_{v_0} \in H^1(X_{v_0} \setminus \hat{\Delta}_{v_0}, C)$ mit $\theta_{v_0} \hat{\psi}_{v_0} = \psi_{v_0}$. Da C triviale $\pi_1(X_{v_0} \setminus \hat{\Delta}_{v_0})$ -Operation besitzt, ist θ_{v_0} ein Homomorphismus. Da x_0 ein k -rationaler Punkt ist und k keine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält, gilt nach (2.3) bzw. (3.6) die Isomorphie $H^1(X \setminus \hat{\Delta}, C)^{G_k} \simeq H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)^{G_k}$ und also $H^1(X \setminus \hat{\Delta}, C) \simeq H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)$. Da nach Voraussetzung k_{v_0} auch keine primitive ℓ -te Einheitswurzel enthält, gilt entsprechend $H^1(X_{v_0} \setminus \hat{\Delta}_{v_0}, C) \simeq H^1(X_{v_0} \setminus \bar{\Delta}_{v_0}, C)$. Also können wir θ_{v_0} als ein Element letzterer Gruppe auffassen. Wir suchen nun ein $\theta \in H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)$ mit $\text{res}_{v_0} \theta = \theta_{v_0}$.

Sei $Z = D - \bar{\Delta}$. Gilt $Z = \emptyset$, so folgt die Existenz von θ aus Korollar 2.2.3. Andernfalls müssen wir unterscheiden, ob das ursprüngliche Scholzproblem $\mathcal{S}(k, \Delta)$ zerfallend war oder nicht. In letzterem Fall argumentieren wir wie folgt. Nach Voraussetzung ist $\psi_{v_0}(\pi_1(x)) = 1$ für alle $x \in Z_{v_0}$. Da andererseits

$$\theta_{v_0}(g) \hat{\psi}_{v_0}(g) = \psi_{v_0}(g)$$

gilt, erhalten wir $\theta_{v_0}|_{\pi_1(x_{v_0})} = (\hat{\psi}_{v_0}|_{\pi_1(x_{v_0})})^{-1}$. Da nach Schritt 2 $\hat{\psi}$ in den Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist, gilt $\hat{\psi}|_{\pi_1(x)} \in H^1(\{x\}^c \times_S \mathcal{X}_T \setminus \hat{\Delta}^c)$. Insbesondere ist auch $\hat{\psi}_{v_0}$ entlang der speziellen Faser unverzweigt. Dasselbe gilt für ψ_{v_0} nach Voraussetzung, und also ist $\theta_{v_0} \in H^1(\mathcal{X}_{v_0} \setminus \bar{\Delta}_{v_0}^c, C)$. Somit

$$((\hat{\psi}^{-1}|_{\pi_1(x)})^{-1})_{x \in Z}, \theta_{v_0}) \in \tilde{H}(Z) \times_{\tilde{H}(Z_{v_0})} H^1(\mathcal{X}_{v_0} \setminus \bar{\Delta}_{v_0}^c, C).$$

Wegen der v_0 -Exzellenz von D und $T \subset T_{r+1} := T(\bar{\Delta}) = T(\Delta_{r+1})$, existiert wegen der Surjektivität von χ_{r+1} in (6.4) ein eindeutiges Element $\theta \in H^1(\mathcal{X}_{T_{r+1}} \setminus \bar{\Delta}^c, C) \hookrightarrow H^1(X \setminus \bar{\Delta}, C)$ mit $\iota_x^* \theta = (\hat{\psi}|_{\pi_1(x)})^{-1}$ für alle $x \in Z$ und $\text{res}_{v_0} \theta = \theta_{v_0}$. Nun gilt nach Voraussetzung $I(D) \subset T$. Nach Definition existiert also für jedes $v \in \bar{T} - T$ ein $x \in D - \bar{\Delta}$ mit $x^c \times_S \kappa(v) \not\subset \bar{\Delta}^c \times_S \kappa(v)$. Da andererseits D über $S \setminus T$ fast etal ist und $\iota_x^* \theta = (\hat{\psi}|_{\pi_1(x)})^{-1} \in H^1(\{x\}^c \times_S \mathcal{X}_T \setminus \hat{\Delta}^c)$ liegt, muß zufolge Proposition 3.2.15 θ entlang der Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt sein. Wegen (6.8) ist $\psi = \theta \hat{\psi}$ eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften. Daß ψ tatsächlich eine Scholzüberlagerung beschreibt, folgt aus Ergänzung 3.3.6.

Es bleibt noch der Fall, daß das ursprüngliche Scholzproblem zerfallend war. Dann gilt $\theta_{v_0} \in H^1(\mathcal{X}_{v_0} \setminus \{x'\}^c, C)$ mit $\theta_{v_0}|_{\pi_1(x_{v_0})} = 1$ für alle $x_{v_0} \in D_{v_0} - \{x'_{v_0}\}$ (Proposition 5.1.3). Insbesondere ist

$$((1)_{x \in D - \{x'\}}, \theta_{v_0}) \in \tilde{H}(D - \{x'\}) \times_{\tilde{H}(D_{v_0} - \{x'_{v_0}\})} H^1(\mathcal{X}_{v_0} \setminus \{x'_{v_0}\}^c, C).$$

Summenzerlegungen. Diese sei für die erste Zeile so gewählt, daß sie mit der durch s^* induzierten übereinstimmt. Dann ist jedoch *nicht* klar, ob r_v mit diesen direkten Summenzerlegungen verträglich ist. Da i.a. $\varepsilon_{\text{geo}} \neq 0$ gilt, ist insbesondere nicht klar, ob das Bild von $r_v(\varepsilon_{\text{geo}})$ in $H^1(I_{\xi_v}, C)$ verschwindet. Das ist nämlich genau dann der Fall, wenn $H^1((\mathcal{X}_v \setminus D_v)^{sh}, C)^{G_{\kappa(\varepsilon_v)}} \rightarrow H^1(X_v \setminus \Delta_v, C)^{G_{k_v}}$ surjektiv ist.

Ferner gilt $T = T(x')$. Nach eventueller Umnummerierung von D gibt es wegen der vorausgesetzten Surjektivität von χ_1 in (6.4) ein $\theta \in H^1(\mathcal{X}_T \setminus \{x'\}^c, C)$ mit $\text{res}_{v_0} \theta = \theta_{v_0}$ und $\iota_x^* \theta = 1$ für $x \in D - \{x'\}$. Dann ist $\psi = \theta \hat{\psi}$ eine Lösung mit den angegebenen Eigenschaften, die entlang der Fasern über Punkten außerhalb T unverzweigt ist.

Damit ist Satz 6.3.1 und schlußendlich der Hauptsatz bewiesen. \square

Literaturverzeichnis

- [Bel80] G. V. Belyĭ, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izvestija **14** (1980), 247–256.
- [Blo81] S. Bloch, *Algebraic K-theory and classfield theory of arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **114** (1981), 229–266.
- [BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert, und M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 21, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
- [BT73] H. Bass und J. Tate, *The Milnor ring of a global field*, Algebraic K-Theory II, Lecture Notes in Math., Bd. 342, Springer-Verlag, 1973, pp. 349–446.
- [Cre97] J. E. Cremona, *Algorithms for modular elliptic curves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [FJ86] M. Fried und M. Jarden, *Field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Bd. 11, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1986.
- [Gab] O. Gabber, *Absolute cohomological purity*, Vortragsmitschrift.
- [GJ98] W.-D. Geyer und M. Jarden, *Bounded realization of l -groups over global fields*, Nagoya Math. J. **150** (1998), 13–62.
- [Gro68] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer II, III*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 67–87, 88–188.
- [Hil92] D. Hilbert, *Über die Irreduzibilität ganzer Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten*, J. reine angew. Math. **110** (1892), 104–129.
- [Hoe68] K. Hoechsmann, *Zum Einbettungsproblem*, J. reine angew. Math. **229** (1968), 81–106.
- [Jan89] U. Jannsen, *On the l -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, Galois Groups over \mathbb{Q} (Y. Ihara et al, ed.), MSRI, 1989, pp. 315–383.
- [Kat79] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using k -groups I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A **26** (1979), 303–376, II *ibid* **27** (1980), 603–683.
- [KS83] K. Kato und S. Saito, *Two dimensional class field theory*, Galois Groups and their Representations (Y. Ihara, ed.), Adv. Stud. Pure Math., Bd. 2, Kinokuniya-North Holland, Amsterdam, 1983, pp. 103–152.
- [Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1986.
- [Mik78] H. Miki, *On Grunwald-Hasse-Wang’s theorem*, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), no. 2, 313–325.

- [Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [Mil86] ———, *Arithmetic duality theorems*, Academic Press, New York, 1986.
- [MM99] G. Malle und B. H. Matzat, *Inverse Galois theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [Moo68] C. Moore, *Group extensions of p -adic and adelic linear groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **35** (1968), 5–70.
- [MS83] A. Merkur'ev und A. Suslin, *K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Math. USSR Izvestija **21** (1983), 307–340.
- [NSW00] J. Neukirch, A. Schmidt, und K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 323, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [OV00] F. Orgogozo und I. Vidal, *Le théorème de spécialisation du groupe fondamental*, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (J.-B. Bost, F. Loeser, und M. Raynaud, eds.), Progress in Mathematics, Bd. 187, Birkhäuser Verlag, 2000, pp. 169–184.
- [Pop88] F. Pop, *Galoissche Kennzeichnung p -adischer Körper*, J. reine angew. Math. **392** (1988), 145–175.
- [Qui73] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory: I*, Algebraic K-Theory I, Lecture Notes in Math., Bd. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 85–147.
- [Ras95] W. Raskind, *Abelian class field theory of arithmetic schemes*, K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras (B. Jacob und A. Rosenberg, eds.), Proc. Symp. Pure Math., Bd. 58.1, AMS, 1995, pp. 85–187.
- [Rei37] H. Reichardt, *Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzgrad*, J. reine angew. Math. **177** (1937), 1–5.
- [Šaf54] I. R. Šafarevič, *Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **18** (1954), 525–578, (= Amer. Math. Transl. 4 (1956) 185–237).
- [Sai85] S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical schemes*, Ann. of Math. **121** (1985), 251–281.
- [Sai86] ———, *Arithmetic on two-dimensional local rings*, Invent. Math. **85** (1986), 379–414.
- [Sal82] D. Saltman, *Generic galois extensions and problems in field theory*, Adv. Math. **43** (1982), 250–283.
- [Ser77] J.-P. Serre, *Modular forms and Galois representations*, Algebraic Number Fields (A. Fröhlich, ed.), Academic Press, Boston, 1977, Auch in Serres *Œuvres III*, pp. 193–268.

- [Ser92] ———, *Topics in Galois theory*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [Ser94] ———, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 5, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
- [ST68] J.-P. Serre und J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Annals of Math. **68** (1968), 492–517.
- [Son94] J. Sonn, *Brauer groups, embedding problems, and nilpotent groups as Galois groups*, Israel J. Math. **85** (1994), 391–405.
- [EGA] A. Grothendieck, *Éléments de Géométrie Algébrique*, Bd. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 1960–67, (in Zusammenarbeit mit J. Dieudonné).
- [SGA 1] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 224, Springer-Verlag, 1971.
- [SGA 4] A. Grothendieck et al., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972.
- [SGA 4 $\frac{1}{2}$] ———, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics, Bd. 569, Springer-Verlag, 1977.